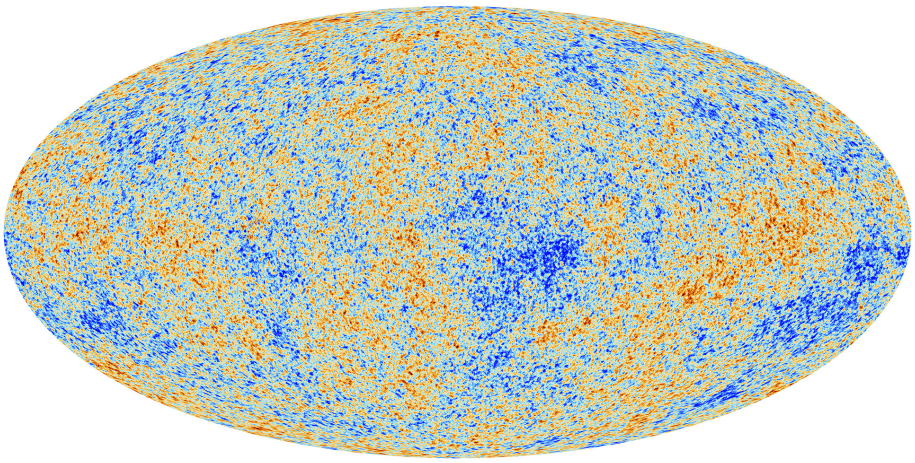
Année 2023-2024 Collège de Genève

Cosmologie et relativité générale
Exercices et activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller



UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES

SwissMAP
The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research

Table des matières

© *Terms of use*

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms :

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original.

Suggested citation :

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)
Cosmologie et relativité générale : Activités pour les élèves du Secondaire II
NCCR SwissMAP/Outreach Education, Genève 2021

https://nccr-swissmap.ch/school-teachers-children/outreach-resources/general-relativity#-Theory ou
https://physalice.ch/cosmo (from October 2021)

1 Grandeurs

Exercice 1. L'année-lumière

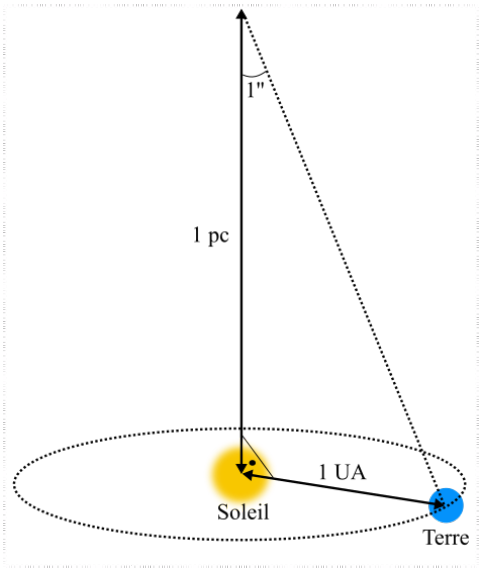
a) Définir en français ce qu'est une ***année-lumière*** (al).

b) En sachant que la lumière se propage dans le vide avec une vitesse d'intensité c = 299 792 458 m/s, exprimer 1 al en mètres. Exprimer ce résultat avec un seul significatif (facile à retenir).

c) « Regarder loin signifie regarder dans le passé », pourquoi ? En observant de galaxies de plus en plus lointaines, la proportion de galaxies elliptiques et irrégulières augmente par rapport aux galaxies spirales. Comment expliquer cela ? Formuler quelques hypothèses.

Exercice 2. Le parsec

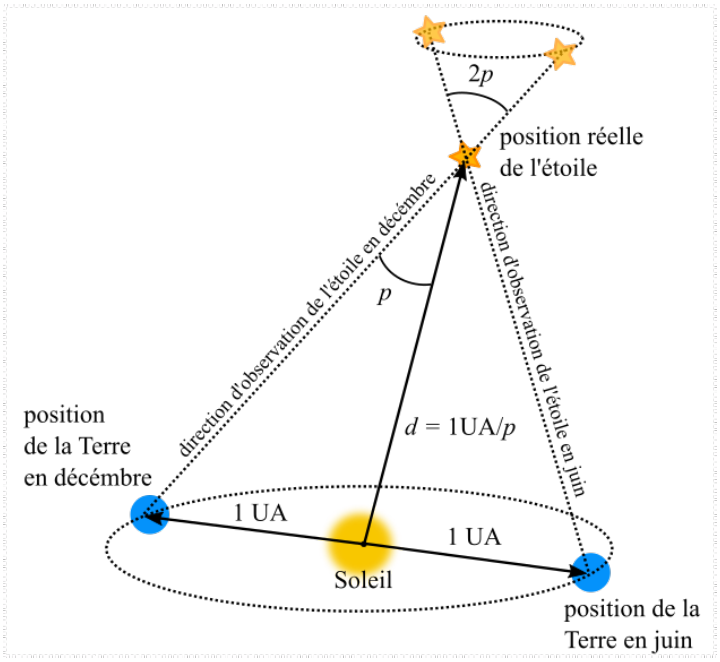
Le ***parsec***, noté pc, est l'unité de mesure des distances la plus utilisée en astronomie. Elle se base sur la parallaxe trigonométrique, la méthode la plus ancienne et la plus fiable pour mesurer les distances stellaires. Considérons le triangle rectangle du schéma ci-dessous, ayant comme premier côté de l'angle droit l'***unité astronomique***, notée UA (le rayon de l'orbite terrestre autour du Soleil), opposé à un angle de 1,0" (= 1°/3600). Le parsec est défini comme le deuxième côté de l'angle droit de ce triangle.



a) En sachant que 1 UA = 1,496 10^{11} m, exprimer 1 pc en m.
Le dessin ci-dessous montre comme la position apparente d'une étoile dans le ciel change à cause de la rotation de la Terre autour du Soleil. L'angle p s'appelle ***parallaxe*** de l'étoile.

b) Déterminer la formule exprimant la distance d entre une étoile et le Soleil (en pc) en fonction de sa parallaxe en secondes d'arc : $d(p)$.

Attention : plus une étoile est lointaine, plus l'angle de la parallaxe p est petit. Puisqu'il n'y a pas d'étoile plus proche qu'un parsec, p est toujours plus petit que 1°, et nous pouvons supposer
1) que la distance Terre - étoile correspond à la distance Soleil - étoile d ;
2) que $\tan(p) \cong p$.



c) L'étoile la plus proche, Proxima Centauri, est à 4,23 al du Système solaire : quelle est sa distance en pc ? Et sa parallaxe ?

d) Si l'incertitude sur la mesure de la parallaxe d'une source est de l'ordre de 0,001", quel est l'ordre de grandeur de la distance maximale que nous pouvons estimer avec cette méthode ? À quoi cet ordre de grandeur correspond-il ?

e) Connaissez vous des méthodes pour déterminer les distances des objets plus lointains ?
Vidéo ODG distances : http://apod.nasa.gov/apod/ ap150324.html

Proxima Centauri est une petite étoile rouge, visible uniquement avec un télescope. Elle fait partie du système d'étoiles « Alpha Centauri », visible depuis l'hémisphère sud, dont l'étoile plus brillante est semblable au Soleil. Crédit : http ://apod.nasa.gov/apod/ap160118.html.

Exercice 3. Densités lumineuses moyennes

a) En utilisant la table CRM (ou en cherchant sur internet), calculer la masse volumique moyenne du Soleil, de la Terre puis du Système solaire (en notation scientifique et en unités SI, avec un nombre pertinent de chiffres significatifs).

b) Les études sur les étoiles proches montrent que l'ensemble des étoiles visibles a en moyenne un rapport masse/luminosité cinq fois plus grand que le Soleil [1]

$$\frac{M_{\text{lum}}}{L_{\text{lum}}} = 5\,\frac{M_\odot}{L_\odot}$$

où $M_\odot$ et $L_\odot$ représentent respectivement la masse et la luminosité du Soleil. La luminosité de la Galaxie est è $L_{\text{gal}} \approx 2 \cdot 10^{11}\,L_\odot$, et son rayon, en tenant compte uniquement de la matière lumineuse, est d'environ 15 kpc. Estimer la masse de matière lumineuse de la Voie lactée, $M_{\text{lum gal}}$, puis sa la masse volumique lumineuse moyenne, $\rho_{\text{lum gal}}$ (résultats en notation scientifique et en unités SI, avec un nombre pertinent de chiffres significatifs).

c) Nous comptons en moyenne 5 galaxies pour chaque portion cubique d'univers de 10 Mpc d'arête. En supposant que la masse lumineuse de la Voie lactée soit représentative de la moyenne des masses lumineuses de toutes les galaxies, en déduire la masse volumique lumineuse moyenne de l'univers. Exprimer ce résultat en $M_\odot/\text{Mpc}^3$ e in kg/m^3, en notation scientifique. Quel est son ordre de grandeur ? Ce résultat est-il en accord avec la valeur donnée dans le cours ?

d) Convertir cette densité en nombre d'atomes d'hydrogène par mètre cube.

1. http://roffet.com/documents/sciences/mise-en-evidence-de-la-masse-cachee/i/

Exercice 4. Probabilité de collision

L'image ci-dessous a été créée à partir des données d'une simulation de la NASA, indiquant que la Voie lactée et Andromède sont en train de se rapprocher pour collisioner dans environ quatre milliards d'années. Celle ci est un reconstruction de comme le ciel pourrait apparaître sur Terre à ce moment-là.

Crédit : http ://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/science/milky-way-collide.html (NASA).

Vidéo de la simulation de la collision entre la Voie lactée et Andromède :
https://www.youtube.com/watch?v=kvyeP_bI4bc

Nous pouvons considérer le disque lumineux d'Andromède comme une surface circulaire de rayon $R \approx 30$ kpc, contenant environ 400 milliards d'étoiles. Supposer que le rayon moyen des étoiles est environ égal à celui du Soleil : $r \approx 10 \cdot R_{\odot}$.

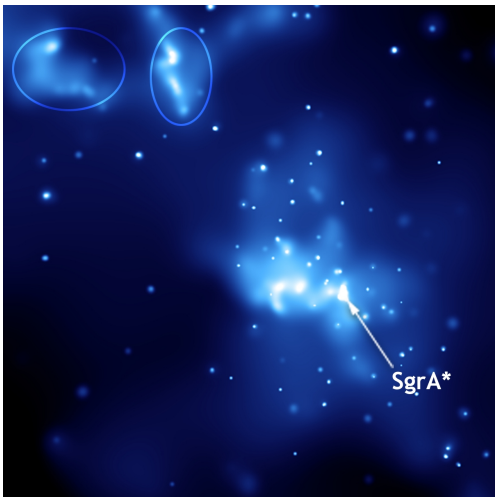
a) Expliquer pourquoi les collisions entre les galaxies sont relativement fréquentes, alors que celles entre les étoiles de deux galaxies en collision sont rares.

b) Estimer le pourcentage de surface occupée par les étoiles d'Andromède par rapport à la surface totale occupée par le disque galactique. Ce pourcentage correspond à la probabilité qu'une étoile de la Voie lactée (par exemple le Soleil) rencontre une étoile d'Andromède lors de la collision entre ces deux galaxies.

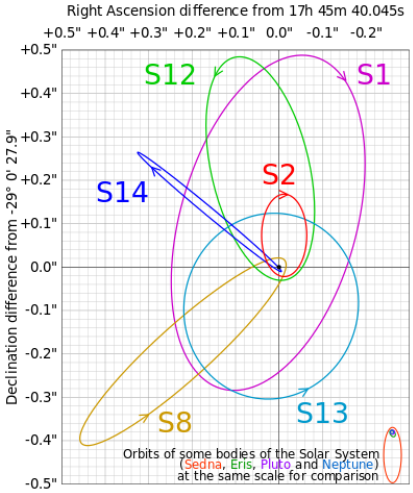
c) Quel est l'ordre de grandeur du nombre total de collisions d'étoiles lors de la collision entre Andromède et la Voie lactée ?

Exercice 5. L'orbite de S2

La figure ci-dessous à gauche montre une image de Sagittarius A* (Sgr A*), la source radio compacte dans le centre de la Voie lactée. Elle a été prise avec un télescope à rayons X de la NASA. Les images dans les ellipses sont des échos réfléchis par les radiations X sur les nuages voisines. À partir de l'étude du mouvement de certaines étoiles autour de cette source, les astronomes ont pu déduire la présence d'un trou noir supermassif à cet endroit, comme c'est le cas dans toutes les grandes galaxies à spirale.



Crédit : NASA, Wikipedia



Crédit : By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0

L'image à droite [2] reproduit les orbites de six étoiles autour de Sgr A*. À titre comparatif certaines orbites de planètes du Système solaire sont aussi représentées. L'étoile S2, dont nous avons pu suivre une révolution complète depuis 1995 jusqu'en 2010, possède un périhélie (la distance minimale à Sgr A* dans son orbite) de 120 UA et une période de 15 ans. Pour simplifier, nous considérons l'orbite de S2 comme un cercle de rayon $r \approx 1000$ UA (environ dix fois plus grand que son périhélie).

a) Avec cette approximation, estimer la vitesse scalaire moyenne de S2 sur une période. Donner le résultat en unités SI.

b) En utilisant les données de la table CRM, calculer la distance parcourue par Neptune lors d'une révolution complète autour du Soleil (utiliser l'approximation d'orbite circulaire).

c) Comparer les estimations des longueurs des orbites de S2 et de Neptune en calculant leur rapport.

d) Calculer la vitesse scalaire moyenne de Neptune sur une révolution autour du Soleil.

2. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15252541

e) Comparer les vitesses scalaires moyennes de S2 et de Neptune en calculant leur rapport.

À cette adresse, on peut visionner une simulation de l'orbite de S2 :
https://phys.org/news/2017-08-stars-orbiting-supermassive-black-hole.html#jCp

Exercice 6. Comparaison des interactions gravitationnelle et électrique

Partie 1 :

Selon le modèle de Bohr, dans l'atome d'hydrogène l'électron tourne autour du proton [3] sur une orbite de rayon $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m.

a) Calculer l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle électron-proton. Puis, dans le même atome, calculer l'intensité de la force d'attraction électrique électron-proton. Vous pouvez trouver les valeurs des charges et des masses de ces particules, ainsi que les constantes G (constante de gravitation universelle) et k (constante de Coulomb) dans l'Annexe A.

b) Quel est le rapport entre les intensités de la force électrique et celle gravitationnelle dans l'atome d'hydrogène ? Est-ce que ce rapport change si l'on varie la distance entre les deux particules ?

Partie 2 :

c) Estimer le nombre de protons contenus dans la Terre à partir de la masse de la Terre et la masse du nucléon (expliquer pourquoi peut-on négliger la masse des électrons dans ce calcul) et en sachant que les noyaux atomiques possèdent en moyenne la même quantité de protons et de neutrons.

d) Quelle serait la charge électrique de la Terre si on lui arrachait tous ses électrons ? Et celle de la Lune ?

e) Donner un ODG de l'intensité de la force électrique entre la Terre et la Lune si leurs charges étaient celles calculées au point (d). La comparer à celle de la force gravitationnelle.

f) Pourquoi, à l'échelle astrophysique, l'interaction électrique est négligeable par rapport à l'interaction gravitationnelle ?

3. Ce modèle atomique est dépassé car les électrons n'ont pas des vitesses et des positions précises dans l'atome. Toutefois, il donne une bonne estimation de ordres de grandeurs des forces en jeux.

Exercice 7. Masse et énergie

La masse des corps est l'une des nombreuses formes d'énergie possibles (mécanique, chimique, radiation, chaleur). L'Annexe C donne la formule de l'énergie totale d'une particule en mouvement avec vitesse v d'après la relativité restreinte :

$$E_{\text{rel}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \, .$$

a) Calculer quelle est l'énergie d'un élève de 50 kg au repos. La comparer à son énergie cinétique lorsqu'il voyage dans un avion à la vitesse de 1000 km/h.

b) Montrer que, dans le cas limite où $v \ll c$ (donc $x = v^2/c^2 \to 0$), la formule relativiste ci-dessus peut s'écrire comme la somme de l'énergie de masse au repos plus le terme d'énergie cinétique newtonien :

$$E_{\text{rel}} \cong m\, c^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 \, .$$

Pour cela, utiliser que la fonction

$$f(x) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - x}}$$

et pour $x \to 0$, on peut faire l'approximation

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x \, .$$

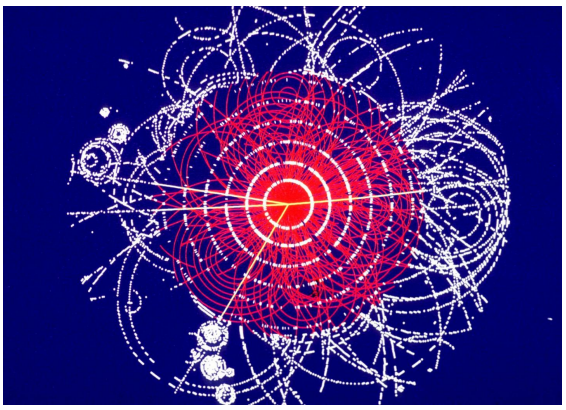
c) Quelle doit être la vitesse de l'élève du point (a) pour que son énergie cinétique soit égale à son énergie de masse ?

Exercice 8 : Le boson de Higgs

L'équivalence entre la matière et l'énergie permet de créer de la masse à partir de l'énergie cinétique des particules. Au CERN, le Large Hadrons Collider (LHC) accélère des protons puis les fait rentrer en collision, afin d'en transformer l'énergie cinétique en énergie de masse. Cela produit – pendant des brefs instants – des particules jamais observées de par leur durée de vie très courte. Ces particules ont toutefois existé dans l'univers primordial, lorsqu'il était plus condensé et donc plus énergétique.

Parmi elles, le boson de Higgs est une particule qui explique, entre autres, quelle est l'origine de la masse de toute particule :
https://archive.nytimes.com/www.nytimes.com/interactive/2013/10/08/science/the-higgs-boson.html?_r=1&#/?g=true

Sa détection a été annoncée pour la première fois au CERN le 4 juillet 2012, après de dizaines d'années de recherche : son existence avait été prédite théoriquement en utilisant des mathématiques et des arguments d'unification par Peter Higgs en 1964. Cette découverte a été récompensée en 2013 par le prix Nobel à P. Higgs et F. Englert. L'image ci-contre montre le résultat de la collision entre deux protons qui ont produit un Higgs se désintégrant en 4 muons (traces jaunes). Sa masse est environ $m_H \approx 2 \cdot 10^{-25}$ kg.



Crédit : http ://home.web.cern.ch/images

a) Quelle est l'énergie de masse au repos du boson de Higgs (voir l'exercice précédent et l'Annexe C) ?

b) Si on veut produire un boson de Higgs au repos à partir de la collision entre deux protons, quelle doit être l'énergie minimale que chaque proton doit fournir ?

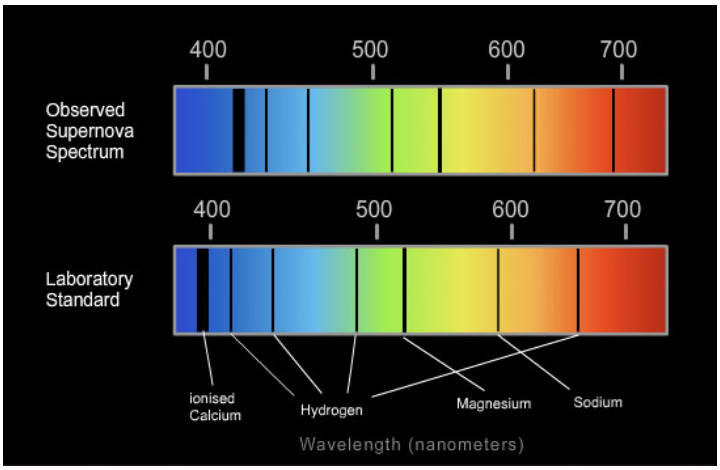
c) Déterminer quelle est vitesse minimale des protons pour que leur collision produise un boson de Higgs.

   Attention : Puisque la vitesse des protons approche celle de la lumière, $v \sim c$, nous ne pouvons pas utiliser la mécanique newtonienne : pour exprimer l'énergie totale du proton, il est nécessaire d'utiliser la formule d'énergie relativiste (Annexe C).

2 Expansion

Exercice 1. La supernova

La première bande de la figure suivante représente le spectre d'émission d'une supernova. Les lignes verticales noires représentent des longueurs d'ondes que nous ne recevons pas, à cause de l'absorption de celles-ci par des atomes de calcium, d'hydrogène, de magnésium et sodium dans la source ou à proximité. Nous connaissons quelles sont ces longueurs dans nos laboratoires (deuxième bande), et elles sont décalées par rapport aux valeurs observés.



Crédit : http ://www.passmyexams.co.uk/GCSE/physics/the-expanding-universe-red-shift.html

a) En utilisant l'échelle de la figure ci-dessus, déterminer la différence entre la longueur d'onde observée (λ_0) et celle émise (λ) pour la ligne d'absorption du magnésium. En déduire le redshift de la supernova.

b) Quelle est la vitesse de récession de cette supernova par rapport à nous ? Donner le résultat en unités SI, ainsi que le rapport entre cette vitesse et celle de la lumière c.

c) En admettant que ce décalage est dû uniquement à l'expansion de l'univers, donner une estimation de la distance de la supernova en Mpc.

d) En déduire une estimation de la durée pendant laquelle la lumière de cette image a voyagé pour nous parvenir.

Exercice 2. Le redshift

Considérons une source lointaine qui émet une radiation de longueur d'onde λ.

a) Quel est son redshift si nous observons aujourd'hui cette radiation avec une longueur d'onde double : $\lambda_0 = 2\lambda$?

b) Même question, mais si nous observons $\lambda_0 = 3\lambda$, puis $\lambda_0 = 10\lambda$.

c) Quel doit être le redshift d'une source pour qu'une lumière émise dans le vert soit observée dans le rouge ?

Exercice 3. La formule de l'effet Doppler

a) Démontrer que la formule reliant le redshift d'une source $z = (\lambda_0 - \lambda)/\lambda$ à sa vitesse de récession v par rapport à l'observateur est équivalente à l'équation de l'effet Doppler non relativste pour une onde se propageant à une vitesse c :

$$f_0 = f \cdot \frac{c}{c+v} \, .$$

b) Pour quelles valeurs de z cette formule est valable (i.e. pour quelles valeurs le redshift cosmologique peut être assimilé à un effet Doppler standard) ?

Exercice 4. Limite non-relativiste de l'effet Doppler relativiste

L'effet Doppler relativiste est donné par la formule

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \tag{1}$$

où $\beta = v/c$, λ_0 est la longueur d'onde observée et λ est la longueur d'onde à l'émission d'une source en mouvement.

a) Quelle est la limite de z lorsque $\beta \to 1$ ($v \to c$) ?

b) Montrer que, dans la limite non-relativiste $\beta \to 0$ ($v \ll c$), la formule (**??**) ci-dessus devient la formule classique de l'effet Doppler :

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + z = 1 + \beta \, . \tag{2}$$

Exercice 5. La constante de Hubble

Les estimations actuelles de la constante de Hubble donnent

$$H_0 \approx 7 \cdot 10^4 \ \frac{\text{m/s}}{\text{Mpc}} \ .$$

a) Convertir cette valeur en $\frac{\text{nm}}{\text{année}}$/km. Pouvons nous ressentir cette expansion à notre échelle ?

b) Quelle est la vitesse de l'expansion à l'échelle du diamètre du Système solaire ? Comparer son ordre de grandeur (ODG) avec celui de la vitesse de Pluton autour du Soleil $v_P = 4{,}74$ km/s (= 17 100 km/h).

c) Quelle est la vitesse de l'expansion à l'échelle du diamètre de notre galaxie ? Comparer son ODG à celui de la vitesse de rotation du Soleil autour du noyau galactique $v_\odot = 220$ km/s.

d) Quelle est la vitesse de l'expansion à l'échelle de la taille moyenne des groupes de galaxies ? La comparer avec la vitesse à laquelle Andromède (image ci-contre) se rapproche de notre galaxie $v_A = 111$ km/s.

Crédit : https ://www.astronomyphotos.com/M31.htm

Exercice 6. Premier *deep field* du JWST

L'image suivante date de juillet 2022 et représente la reconstruction dans le visible du le premier *deep field* du télescope spatial James Webb (JWST), conçu pour détecter les ondes électromagnétiques dans l'infrarouge. Il s'agit d'une minuscule portion de ciel dont le côté mesure environ une seconde d'arc, mais gorgée de galaxies à des distances différentes. Les étoiles brillantes sont celles appartenant à notre galaxie. L'image est centrée sur l'amas SMACS 0723, dont on observe distinctement les deux galaxies elliptiques plus lumineuses au centre de l'image. Le redshift de cet amas est $z = 0,388$.

Crédit : NASA, ESA, CSA, and STScI

https ://www.nasa.gov/image-feature/goddard/2022/nasa-s-webb-delivers-deepest-infrared-image-of-universe-yet

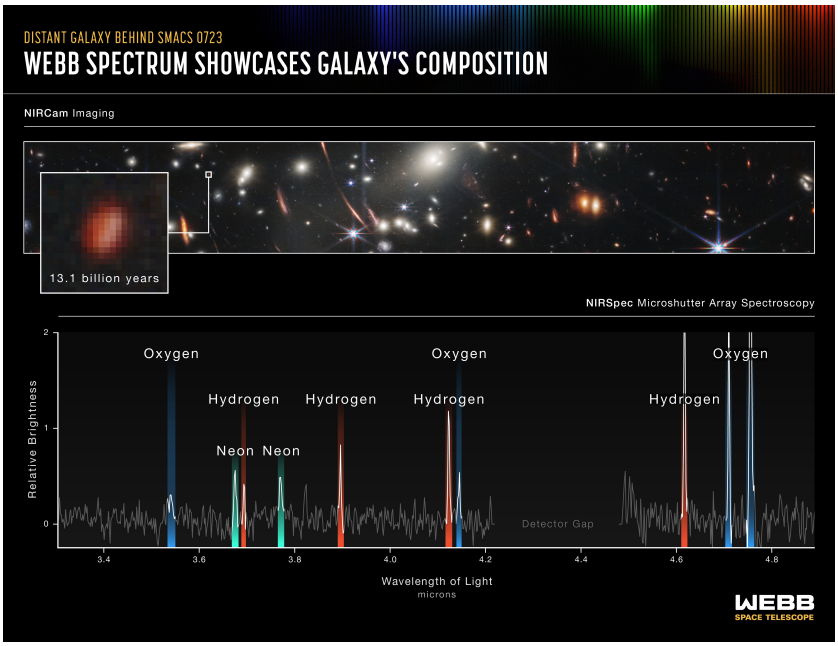
a) À partir du redshift, calculer la longueur d'onde λ_0 détectée par le télescope de la ligne d'émission de l'oxygène OIII provenante de SMACS 0723, en sachant que pour une source OIII observée en laboratoire cette longueur est $\lambda = 0,5007\,\mu$m.

b) Déterminer la distance de SMACS 0723. Est-ce que, à cette distance, l'expansion est négligeable ? Justifier sa réponse.

L'amas SMACS 0723 créé un effet de lentille gravitationnelle (traité au chapitre 4) sur des nombreuses sources plus distantes, qui apparaissent par conséquent déformées et amplifiées [4]. En particulier, la source indiquée dans l'agrandissement ci-dessous est parmi les plus lointaines. Les longueurs d'onde d'émission détectées de certains éléments chimiques sont également reportées pour cette source, en μm. En particulier, la dernière ligne de l'oxygène (ligne bleu tout à droite) représente l'oxygène OIII [5].

4. Pour une analyse approfondie voir la référence https://arxiv.org/pdf/2207.07101.pdf.

5. Les lignes représentent, de gauche à droite, le doublet OII ($\lambda = 372,6$ et 372,8 nm), NeIII ($\lambda = 386,9$ nm), He ($\lambda = 388,9$ nm), NeIII ($\lambda = 396,8$ nm), H_ϵ ($\lambda = 397,0$ nm), H_δ ($\lambda = 410,2$ nm),



Crédit : NASA, ESA, CSA, and STScI https ://esawebb.org/news/weic2209/.

c) En lisant dans le graphique la valeur de la longueur d'onde observée pour la ligne de l'oxygène OIII, émise il y a environ 13,1 milliards d'années par cette source lointaine, calculer son redshift.

d) Vérifier que la réponse trouvée au point c) est cohérente avec le temps de traversée de la lumière annoncé dans la figure, en comparant le résultat avec les valeurs du tableau sur le site suivant : http://lcogt.net/spacebook/redshift.

e) Est-ce que cette source se trouve à l'intérieur du rayon de Hubble ? Pourquoi ? Expliquer sa réponse par les formules.

f) Peut on calculer la distance que nous sépare de cette source en utilisant la loi de Hubble-Lemaître ? Justifier.

g) Est-ce que la vitesse d'éloignement de cette source dépasse celle de la lumière ? Si non : calculer cette vitesse. Si oui : expliquer pourquoi sa lumière peut quand même nous parvenir.

H_γ ($\lambda = 434,05$ nm), le premier OIII ($\lambda = 436,3$ nm), H_β ($\lambda = 486,13$ nm) et les deux autres OIII ($\lambda = 495,9$ et 500,7 nm).

Exercice 7. Univers jumeaux

Lire la BD « Cosmic Story » :
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/cosmic_story.htm
À la lumière de vos connaissances sur le Big Bang, quel est le problème dans le modèle d' « univers à deux pôles » (p. 57 à 60 de la BD) ?

Exercice 8. Redshift du fond diffus cosmologique (CMB)

a) En sachant qu'au découplage l'univers avait une température $T \approx 3000$ K, déterminer la longueur d'onde du pic de spectre d'émission $\lambda_{\max}$ du CMB à l'époque. Utiliser la loi de Wien (Annexe D.1 de la théorie sur la radiation du corps noir).

b) On sait qu'aujourd'hui le CMB a une température d'environ 2,7 K. Quel est son redshift ?

c) En utilisant la loi de Hubble-Lemaître, peut-on déterminer la distance qui nous sépare du découplage ? Si oui, le faire. Sinon, expliquer pourquoi.

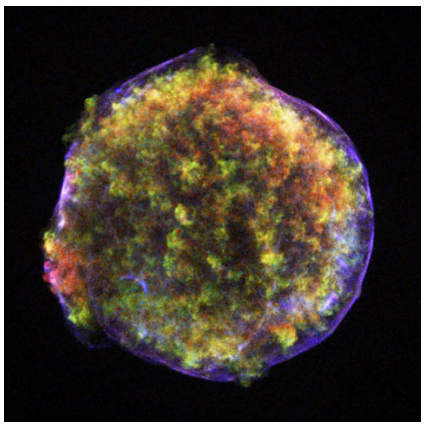
Exercice 9. Distance de luminosité

Dans l'exercice 1 nous avons vu qu'il est possible de déterminer la distance de certaines sources à partir du redshift.

Néanmoins, pour certaines sources appelées ***chandelles standard*** – car nous en connaissons la luminosité absolue L (sa puissance radiative, en W) – nous pouvons déterminer leur distance en mesurant le flux reçu f (la puissance par unité de surface, en $\mathrm{W/m^2}$). La distance déterminée de cette manière s'appelle distance lumineuse, indiquée D_L (Annexe D.2).

Un exemple important de chandelle standard utilisée en cosmologie est celui des explosions de supernovae Ia.

Lien sur une vidéo simulant une supernova Ia :
https://it.wikipedia.org/wiki/Supernova_di_tipo_Ia



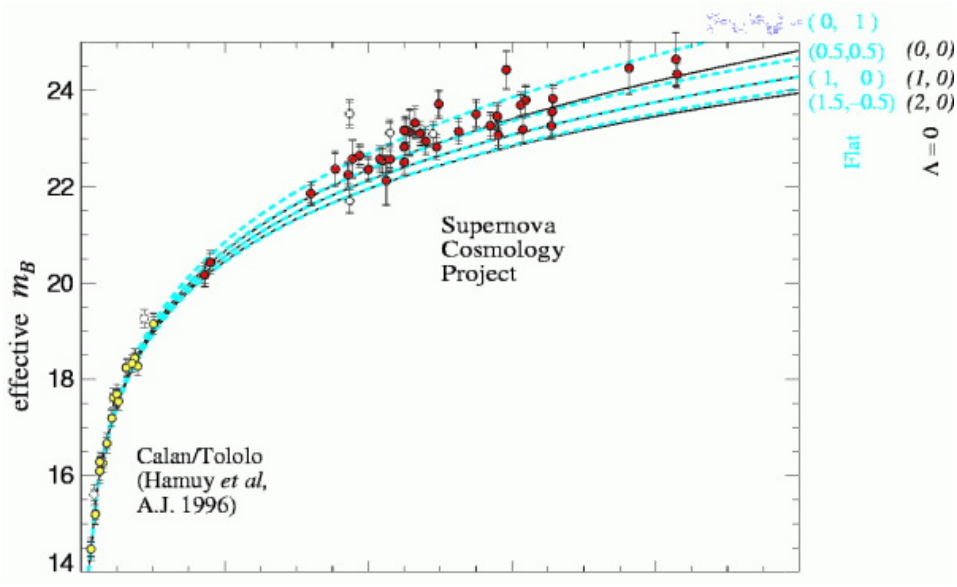
Crédit : NASA/CXC/Rutgers/J.Warren & J.Hughes et al. Cette photo est une image dans les rayons X des restes de la supernova Ia, observée en 1572 par l'astronome danois Tycho Brahe.

a) Donner la formule exprimant la distance D_L entre un observateur et une source en fonction de sa luminosité absolue L et du flux mesuré f. Admettre que l'émission de la source a une symétrie sphérique.

b) En sachant que la luminosité d'une supernova Ia est de l'ordre de dix milliards de fois plus grande que celle du Soleil ($L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ W),quel est l'ODG de sa distance si on mesure un flux de 10^{-13} W/m^2 ? Donner la réponse en m et en Mpc.

c) En mesurant leur éclat et en le comparant avec le redshift nous observons que, pour les sources les plus lointaines, les distances correspondantes sont beaucoup plus grandes que celles attendues si l'univers était composé uniquement de matière – qu'elle soit ordinaire ou noire – car celle-ci devrait ralentir son expansion par attraction gravitationnelle (graphique ci-dessous). Comment expliquer cela ?

Le graphique suivant montre les mesures publiées dans un article scientifique en 1998 (Perlmutter et al., Prix Nobel en 2011). Il s'agit des magnitudes mesurées des supernovae Ia, m_s en fonction du redshift ($m_s = -2,5 \cdot \log f_s$ + constante).



Crédit : Perlmutter *et al.*, Astrophysical Journal 517, 565-586, 1999.

Exercice 10. Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse.

1. Les galaxies spirales sont plus anciennes que les galaxies elliptiques.
2. Les baryons sont des particules qui interagissent uniquement gravitationnellement.
3. À cause de l'expansion de l'univers, la vitesse de récession entre deux galaxies très éloignées peut dépasser la vitesse de la lumière, même si la relativité restreinte affirme que rien ne peut aller plus vite que c.
4. En relativité restreinte la matière est une forme d'énergie. Donc la matière noire et l'énergie noire sont deux manières de nommer la même chose.
5. Juste avant le découplage, la matière noire était libre de former des sur-densités par attraction gravitationnelle, car elle n'interagissait pas avec le rayonnement électromagnétique.
6. Le Big Bang est une explosion qui a eu lieu à un certain instant, donnant naissance à l'univers.

Activité. Le redshift cosmologique

En observant les galaxies lointaines, la lumière que nous recevons est systématiquement décalée vers le rouge.

a) Expliquer pourquoi les ondes que nous recevons ont toujours une longueur d'onde λ_0 plus grande que la longueur d'onde λ émise par la source.

L'image suivante montre l'exemple d'un spectre d'émission d'un même type de galaxie [6] à des distances différentes. Il s'agit de l'intensité de radiation reçue (axe des y, en W) pour chaque longueur d'onde (axe des x, en nm). De bas en haut, on observe :

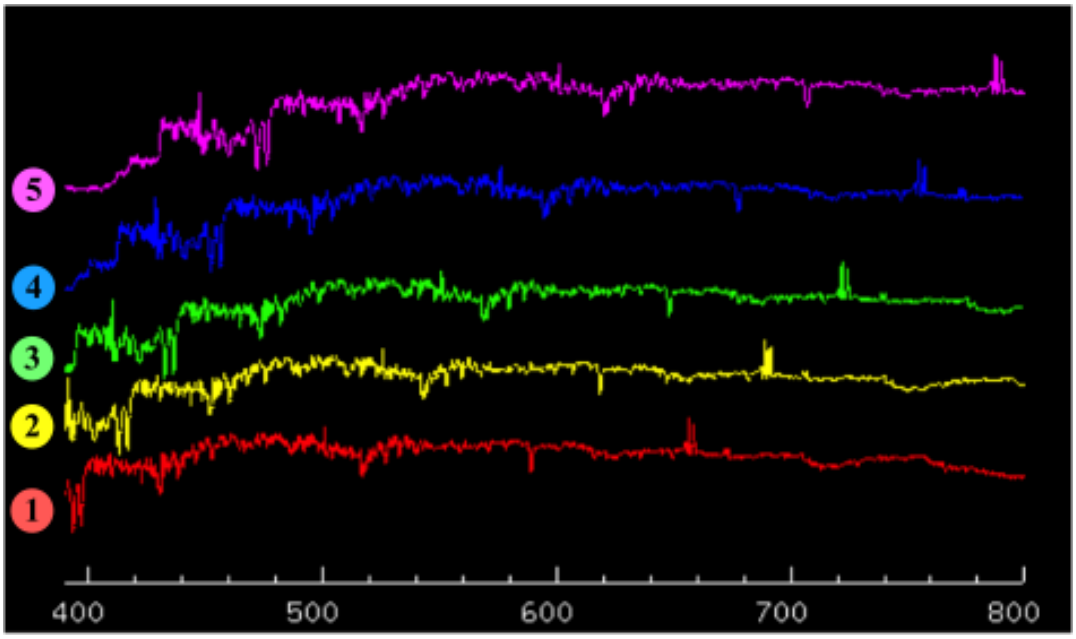
1. Le spectre d'émission que l'on observe dans notre galaxie, à la distance $r = 0$ al. Celui-ci représente donc le spectre tel qu'il est à l'émission, non décalé (λ).

Les spectres suivants représentent le même que le premier, mais reçus de galaxies de plus en plus distantes : ce spectres sont de plus en plus décalés vers le rouge ($\lambda_0 > \lambda$) :

2. Le même spectre, reçu d'une galaxie à la distanc $r = 6,0 \cdot 10^8$ al ;
3. Le même spectre, reçu d'une galaxie à la distance $r = 12 \cdot 10^8$ al ;

6. Il s'agit de galaxies différentes à des distances différentes, mais ayant les mêmes caractéristiques chimiques, donc émettant le même spectre.

4. Le même spectre, reçu d'une galaxie à la distance $r = 18 \cdot 10^8$ al ;
5. Le même spectre, reçu d'une galaxie à la distance $r = 21 \cdot 10^8$ al .



b) En utilisant le pic d'émission le plus prononcé (celui pour lequel λ est autour de 650 nm dans notre galaxie), compléter le tableau suivant.

	λ_0 [nm]	$\lambda_0 - \lambda$ [nm]	$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$	r [Mpc]
Pic du spectre 2)				
Pic du spectre 3)				
Pic du spectre 4)				
Pic du spectre 5)				

c) Combien de chiffres significatifs ont les données les moins précises de ce tableau ?

d) À l'aide des données du tableau, positionner sur un graphique les points correspondants du redshift (axe des y) en fonction de la distance de la galaxie (axe des x). *Vous pouvez utiliser un tableur, comme Calc ou Excel. Ne pas oublier d'indiquer le titre, les grandeurs et les unités sur les axes.*

e) Peut-on voir s'il existe une relation entre z et r ? Si oui, de quel type ?

f) Insérer une courbe de tendance dans ce graphique : une droite d'équation $z = a \cdot r + b$, avec $b = 0$ (où z est l'ordonnée et r est l'abscisse). Expliquer pourquoi b doit être égal à zéro.

g) Quelle relation entre z et r est représentée par cette droite ? Quelle est la valeur numérique (avec un nombre pertinent de chiffres significatifs et la bonne unité) de la constante a dans l'équation $z = a \cdot r$? À quelle grandeur physique correspond-elle ?

h) Utiliser la formule de l'effet Doppler reliant z et v (pour $v \ll c$) pour trouver la relation entre les vitesses des galaxies observées v let leur distance r, à partir du résultat du point (g) : $v =$ constante $\cdot\, r$.

i) Quelle est la valeur numérique de cette constante (avec un nombre pertinent de chiffres significatifs et la bonne unité) ? Comment interpréter ce résultat d'un point de vue cosmologique ?

3 Bases de relativité générale

Exercice 1. Charge électrique et charge gravitationnelle

On donne deux particules de masses et charges électriques respectives m_1, q_1 et m_2, q_2.

a) On place séparément chacune de ces particules à une distance d d'une masse M ayant charge électrique nulle. Donner les *deux formules* exprimant les accélérations respectives de chacune de deux particules, dues à l'interaction gravitationnelle avec M.

b) On place ensuite séparément chacune de ces particules à une distance d d'une charge Q de masse négligeable. Donner les *deux formules* exprimant les accélérations respectives de chacune de deux particules dues à l'interaction électrique avec Q.

c) Est-ce que l'accélération dépend des caractéristiques des particules 1 et 2 dans le cas (a) ? Et dans le cas (b) ? Expliquer pourquoi.

d) Peut la force être répulsive dans le cas (a) ? Et dans le cas (b) ? Expliquer pourquoi.

Exercice 2. L'avion fou

1) Que peut on dire de la vitesse de l'avion de la photo ci-dessous ? Et de son accélération ?

2) Sans d'autres informations, pouvons nous savoir si l'avion est en train de s'approcher ou de s'éloigner de la surface terrestre ?

Exercice 3

Pour chaque point, cocher la case qui correspond à l'affirmation correcte, puis justifier le choix effectué. Procédure par exclusion possible (expliquer pourquoi certains choix sont faux).

1. L'équivalence entre la masse et l'énergie implique

   ☐ que la masse grave est différente de la masse inerte.

   ☐ qu'un corps possède de l'énergie juste parce qu'il possède une masse.

   ☐ que la masse est toujours conservée.

   ☐ que la forme de l'espace-temps n'est pas influencée par l'énergie que celui-ci contient.

   ☐ que la forme de l'espace-temps est influencée par la masse qu'il contient uniquement si celle-ci est assez importante.

2. Une personne est enfermée dans une navette spatiale sans fenêtres, loin de tout astre. Pendant quelques minutes elle est écrasée contre une face de la boîte, puis elle flotte à son intérieur. Explication possible :

   ☐ la navette a été d'abord accélérée, puis décélérée jusqu'à l'arrêt.

   ☐ la navette a été d'abord accélérée, puis l'accélération a cessée et la navette a continué son mouvement à vitesse constante.

   ☐ la navette a toujours bougé avec vitesse constante.

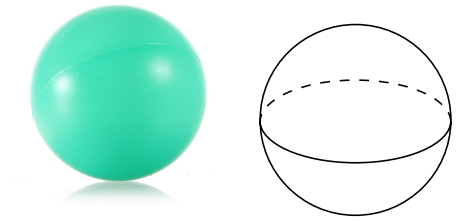
   ☐ la navette a toujours bougé avec accélération constante.

   ☐ la navette suivait d'abord un mouvement rectiligne et uniforme puis, lorsque l'homme flottait, elle a accéléré.

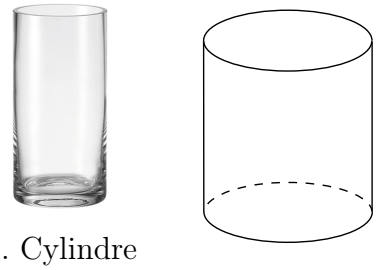
Exercice 4. Solides

a) À chacun des objets (ou morceau d'objets) suivants on associe le solide schématisé à côté. À la surface de chaque solide, colorier

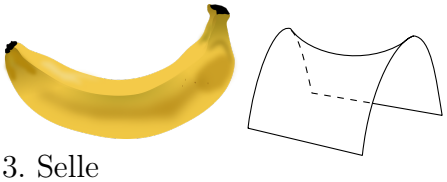
- en jaune les parties de surfaces, lignes ou points constitués de points à courbure de Gauss k_G positive ;
- en bleu les parties de surfaces, lignes ou points constitués de points avec k_G négative ;
- en rouge les parties de surfaces, lignes ou points avec k_G nulle.



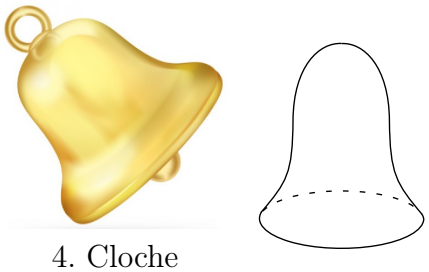
1. Sphère



2. Cylindre



3. Selle



4. Cloche

5. Tore

6. Cône

b) Pour chaque solide colorié, peut-on déterminer quel est le signe de la courbure totale K ? Donner sa valeur, si possible.

Exercice 5. Cercle osculateur d'une parabole

Considérons la parabole d'équation $y_p(x) = x^2$.

a) Déterminer le rayon de courbure R du cercle osculateur à cette parabole au point A=(0 ;0). Quelle est sa courbure en ce point ?

b) Trouver la courbure de la même parabole, mais au point B=(1 ;1).

c) Ecrire l'équation donnant la courbure en un point générique de la parabole $y = x^2$ en fonction de l'abscisse du point : $k(x)$.

d) Pourquoi parler du cercle osculateur d'une droite ne fait pas de sens ?

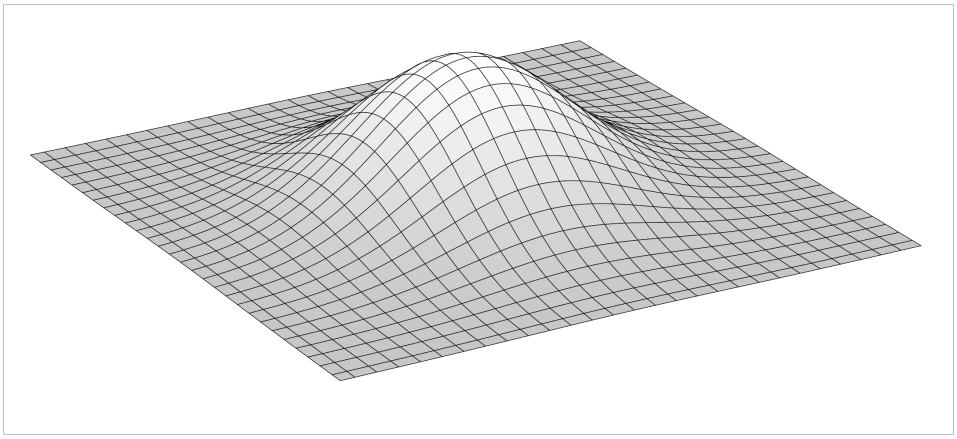
Méthode conseillée : écrire l'équation générique du cercle puis expliciter $y_c(x)$ (attention au choix du signe de la racine). Ensuite résoudre le système en imposant (1) le passage par le point choisi, (2) l'égalité des dérivées premières $y'_c = y'_p$ et (3) l'égalité des dérivées secondes $y''_c = y''_p$.

Exercice 6. La bosse

Imaginez une fine feuille souple et plate. On appuie légèrement avec un doigt par dessous en poussant vers le haut, jusqu'à créer une bosse comme celle de la figure ci-dessous.

a) Quelle est la courbure de Gauss des points sur la feuille *avant* qu'on appuie ? Et la courbure totale de la feuille ?

b) Mêmes questions, mais *après* la déformation.



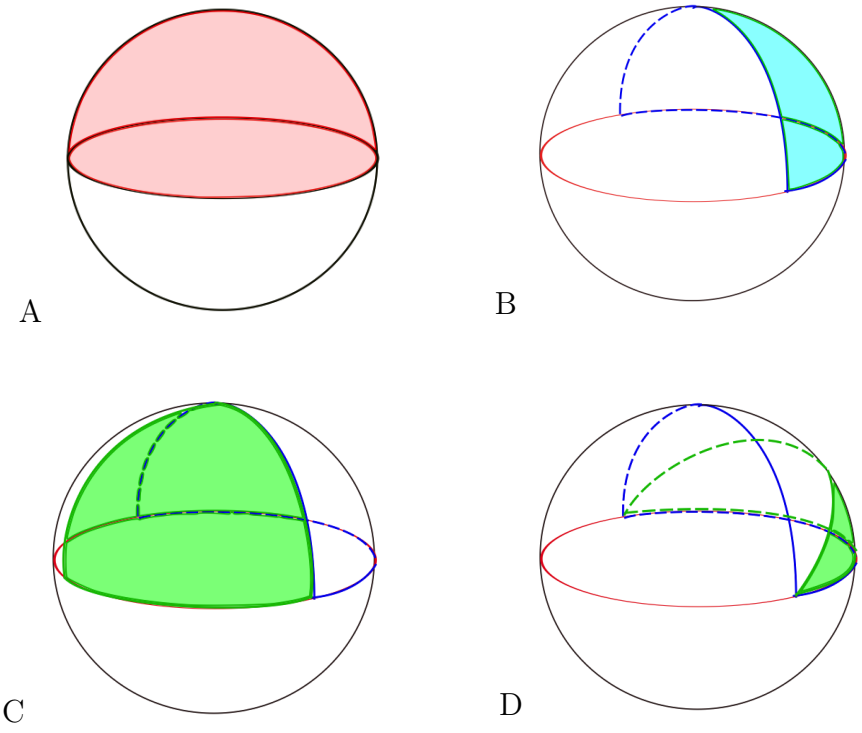
Exercice 7. Transport parallèle

a) En utilisant la définition de courbure totale d'une surface et le raisonnement, déterminer quelle est la courbure totale de la surface

1. d'une sphère ;
2. d'une demie sphère (schéma A de la figure ci-dessous) ;
3. d'un quart de sphère (schéma B de la figure ci-dessous) ;
4. d'un huitième de sphère (schémas C et D de la figure ci-dessous).

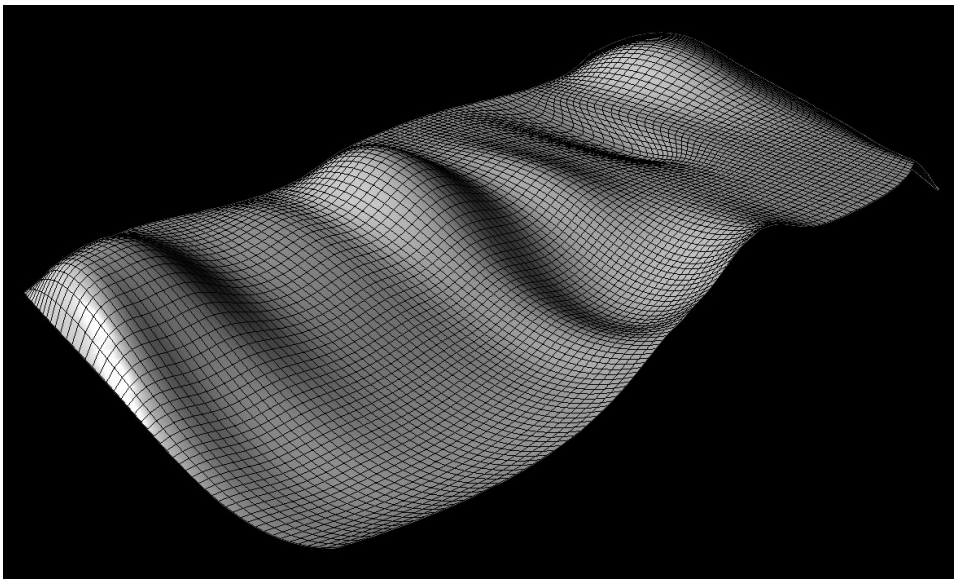
b) Utiliser la méthode du transport parallèle pour vérifier les 4 résultats donnés au point (a). Pour le huitième de sphère tester les deux possibilités : en partageant le quart dans les deux sens possibles, de sorte à obtenir un triangle ou un « biangle » (schémas C et D de la figure ci-dessous).

c) Généraliser les résultats donnés au point (a) : quelle est la courbure totale de la surface de la n-ième partie d'une sphère ?



Exercice 8. La toiture

La surface suivante représente un projet architectural de toiture : il y a 10 zones visibles et distinctes à courbure de Gauss positive, et 10 zones visibles à courbure de Gauss négative. Colorier les zones à courbure positive au crayon rouge, et les zones à courbure négative (certaines adjacentes) au crayon bleu.



Crédit : http ://design.rootiers.it/strutture/comments/recent_calcolo ?page=2

Exercice 9. Le cylindre

a) Sur une feuille A4 placer deux points P et Q tels que leur distance soit du même ordre de grandeur que la taille de la feuille. Tracer la géodésique passant par ces deux points. Est-ce qu'elle correspond au plus court chemin entre ces deux points ?

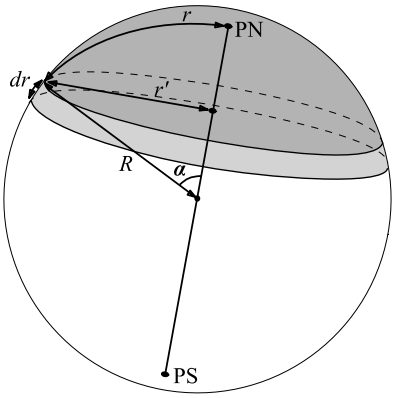
b) Avec la même feuille, construire un cylindre en collant deux bords opposés, de sorte que la géodésique tracée au point (a) soit à l'extérieur du cylindre créé.

1. Est ce que la géodésique tracée au point (a) reste une géodésique du cylindre ? Est-elle encore le plus court chemin entre P et Q ? Si non, tracer le plus court chemin sur le cylindre.
2. Combien de géodésiques reliant P et Q existent à la surface du cylindre ?
3. Qu'est ce qu'il se passe si au lieu de dessiner les points P et Q comme indiqué au point (a), on les dessine très proches, au milieu de la feuille ? Que peut-on en déduire ?

Exercice 10. Cercles, disques et sphères dans un espace courbe

Dans un espace 2D plat les formules du périmètre et de l'aire d'un disque de rayon r sont $P(r) = 2\pi r$ et $A(r) = \pi r^2$.

a) En vous aidant de la figure ci-contre, écrire les équations correspondantes à celles cités ci-dessus, mais dans un espace courbe, avec courbure de Gauss constante positive $k = 1/R^2$ (la sphère du dessin) : $P(r, R)$ et $A(r, R)$.



b) Pour les deux formules trouvées au point (a), vérifier que pour les valeurs limites :
- $r = 0$ (au pôle nord, point PN),
- $r = \pi R/2$ (à l'équateur),
- $r = \pi R$ (au pôle sud, point PS)

on a les résultats attendus, par exemple pour le périmètre

$$P(r = 0) = 0\ , \quad P(r = \pi R/2) = 2\pi R \quad \text{et} \quad P(r = \pi R) = 0.$$

c) En suivant la même procédure que pour l'aire et le périmètre d'un cercle de rayon r, donner la formule du volume d'une sphère de rayon r dans un espace 3D courbé avec rayon de courbure constante positive.

Méthode conseillée : considérer un espace uniformément courbé (rayon de courbure R). De la même manière que l'aire (2D) d'un cercle de rayon r correspond à celle de la calotte de rayon r sur la sphère 3D de rayon R, le volume d'une sphère (3D) de rayon r correspond au volume de la calotte de l'hypersphère 4D de rayon R. Pour ce point il n'y a pas de visualisation possible, il faut faire confiance aux calculs... et tester le résultat avec le cas limite $r \to 0$.

Les liens suivants donnent l'accès à deux BD qui donnent une intuition de ce qui se passe avec les grandeurs géométriques dans un espace courbe.

Le géometricon :
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/geometricon.htm

Le trou noir :
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/trou_noir.htm

Exercice 11. Deux visions de la chute libre

a) Enoncer le *principe d'équivalence* dans ses deux versions.

b) Expliquer ce qu'est un mouvement inertiel (i) dans la théorie d'Einstein et (ii) dans la théorie de Newton.

c) Pour chaque situation, cocher la/les case.s correspondante.s à la théorie pour laquelle il s'agit d'un mouvement inertiel.

1. Une navette voyageant à vitesse constante dans l'espace, loin de tout astre.

   ☐ mécanique newtonienne ☐ relativité générale

2. Un parachutiste au début de sa chute, en MRUA avec accélération égale à g.

   ☐ mécanique newtonienne ☐ relativité générale

3. Le même parachutiste dans la suite de sa chute, lorsqu'il atteint sa vitesse limite constante.

   ☐ mécanique newtonienne ☐ relativité générale

4. Une locomotive immobile à la surface terrestre.

   ☐ mécanique newtonienne ☐ relativité générale

5. Une exoplanète orbitant autour de son étoile.

   ☐ mécanique newtonienne ☐ relativité générale

6. Un projectile en mouvement parabolique, lancé depuis la surface d'une planète.

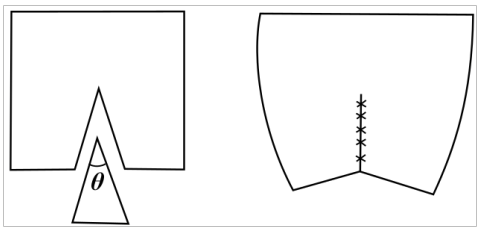
   ☐ mécanique newtonienne ☐ relativité générale

Activité. La courbure du cône

Un cône est un solide avec courbure de Gauss nulle partout, sauf au sommet.

a) À partir d'une feuille plate, où on a préalablement tracé un quadrillage de géodésiques (de lignes droites), construire un cône de la manière suivante :

1. Dessiner un angle arbitraire θ dans le milieu de la feuille et le mesurer, (en degrés, puis convertir en radians).
2. Découper cet angle à l'aide de ciseaux.
3. Coller les deux bords de la feuille ainsi découpés (sans les superposer).



b) Que peut-on dire des géodésiques parallèles sur le cône ? Est-ce qu'elles convergent, divergent, ou restent parallèles ? *On rappelle que les géodésiques doivent garder le même angle d'intersection avec le quadrillage de départ.*

c) En suivant les géodésiques à la surface du cône ainsi obtenu, dessiner un triangle ABC de sorte que le sommet du cône soit à son intérieur.

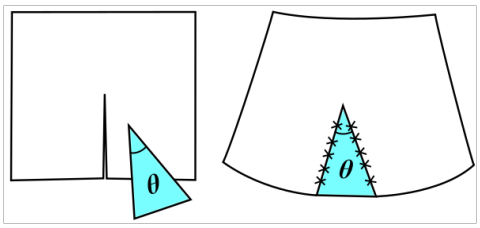
d) Par la méthode du *transport parallèle*, mesurer la courbure totale K de la surface du triangle dessiné. À votre avis, existe-t-il une relation entre K et θ ?

e) Mesurer les angles internes du triangle ABC (les appeler α, β et γ) et calculer leur somme. Quelle est la relation entre $\alpha + \beta + \gamma$ et l'angle θ ôté au point (a) ? Effectuer la démonstration géométrique de cette relation.

f) En utilisant les résultats trouvés aux points (d) et (e), donner la formule reliant la somme des angles internes d'un triangle à sa courbure totale, puis la comparer avec celle donnée dans le cours (Chapitre 4).

g) Comment changent les réponses aux points (b), (c), (d), (e) et (f), si au point (a) on rajoute un angle θ, plutôt que l'enlever ?

h) Expliquer pourquoi la courbure de Gauss du sommet d'un cône est infinie.



4 Lentilles gravitationnelles

Exercice 1. Angle de déviation α (analyse dimensionnelle)

On peut trouver une formule pour l'angle de déviation sans facteur numérique (facteur qui est 2 pour Newton et 4 pour Einstein), de manière relativement simple, soit par l'analyse dimensionnelle. L'idée est de considérer que cette déviation doit dépendre uniquement de trois quantités :

1. L'accélération gravitationnelle à la distance la plus proche de la lentille gravitationnelle $g = \frac{GM}{d^2}$, dont l'unité fondamentale est le $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$;
2. Le paramètre d'impact d (la distance de passage), dont l'unité SI est le m ;
3. La vitesse de passage c, dont l'unité SI est le $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Puisque la déviation est un angle – sans dimensions – ses unités SI sont des radians. Donc dans une combinaison $\alpha \sim g^p \cdot d^q \cdot c^r$, où p, q et r sont des nombres entiers, les mètres et les secondes doivent forcement se simplifier. Utiliser cela pour trouver des contraintes pour les exposants entiers p, q et r, puis choisir la solution la plus simple pour trouver la formule de la déviation.

Exercice 2. Déviation par le Soleil

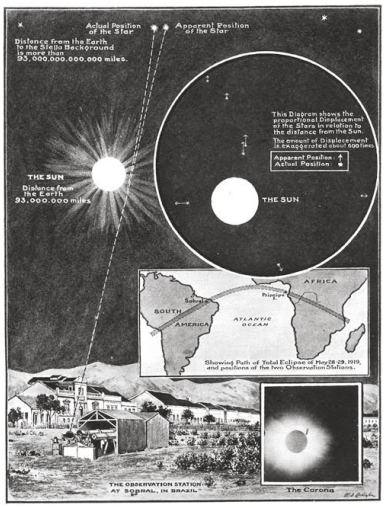
Selon la formule relativiste, obtenue en 1915 par A. Einstein, la déviation d'un rayon de lumière est deux fois plus grande que selon le calcul approximatif newtonien. Ex-

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less Agog Over Results of Eclipse Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

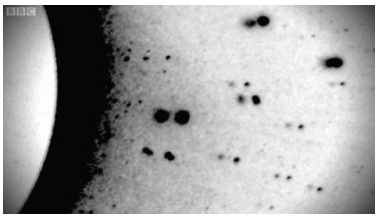
Stars Not Where They Seemed or Were Calculated to be, but Nobody Need Worry.



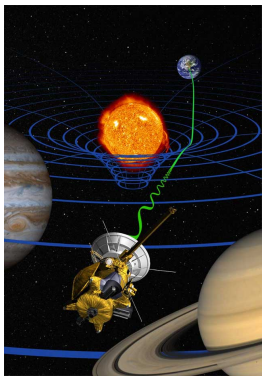
périmentalement, on peut mesurer cette déviation de la lumière provenant d'une étoile

lointaine lorsqu'elle passe près du Soleil. L'idée est de mesurer la direction de la position d'une étoile dans le ciel quand le Soleil n'est pas présent, puis de la comparer avec la direction de position de la même étoile quand le soleil passe à sa proximité : l'image sera décalée d'un angle α. Pour ce faire, il est nécessaire de prendre la deuxième mesure pendant une éclipse solaire totale, sinon la lumière du jour ne permettrait pas de voir celle de l'étoile.

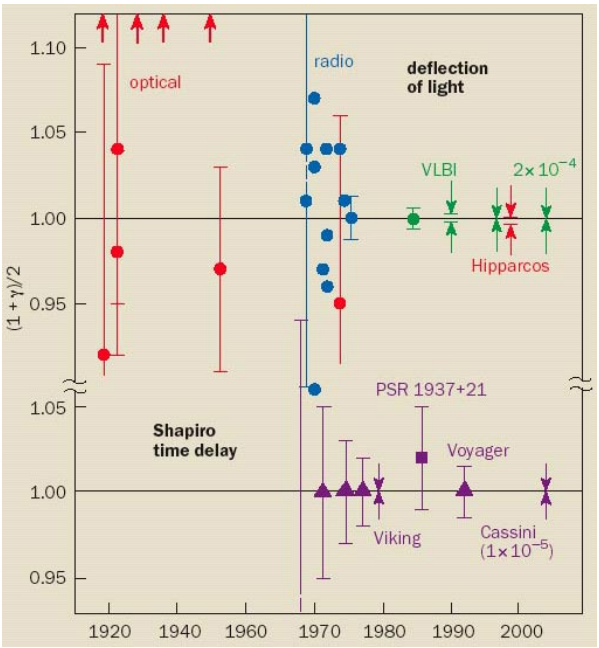
L'observation de l'angle de déviation de la lumière d'étoiles pendant l'éclipse solaire de 1919 par Eddington fut la première expérience en faveur de la théorie d'Einstein. Les images ci-dessus sont celles parues dans « The New York Times » du 10 novembre 1919, elles célèbrent la confirmation de la relativité générale. En réalité la mesure d'Eddington n'était pas assez précise pour confirmer définitivement cette théorie. Le graphique ci-dessous, à droite, montre son résultat et ceux qui l'ont suivi tout au long du siècle dernier, en mesurant l'angle de déflexion de la lumière pour des différentes longueurs d'onde du spectre électromagnétique (visible et radio), mais aussi en mesurant le retard dans l'émission du signal (effet « Shapiro »). Le paramètre γ dans l'axe des ordonnées mesure l'écart de la prévision relativiste : $\alpha = \alpha_{\text{Einstein}} \cdot (1+\gamma)/2$. Plus γ s'approche de l'unité, plus l'angle mesuré est en accord avec la prédiction d'Einstein ; plus il s'approche de 0 plus il confirme le résultat newtonien. Les flèches vers le haut indiquent que la barre d'incertitude sort du graphique. Dans les images ci-dessous à gauche : en haut on observe la position des étoiles en présence du Soleil (décalée) par rapport à la position observée en l'absence du Soleil ; en bas une image de la sonde Cassini, mesurant le paramètre γ par le temps de retard de la réception du signal.



Crédit : https ://briankoberlein.com



Crédit : NASA/JPL-Caltech



Crédit : http ://physicsworld.com

Calculer la déviation d'un rayon de lumière passant à une distance $d = R_\odot$ du centre du Soleil en utilisant

1. la formule newtonienne,
2. la formule relativiste.

Lien ESA :
http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Relativity_and_the_1919_eclipse

Exercice 3. Effet de lentille lunaire ?

On peut facilement mesurer une déviation de l'ordre de $1''$ pour l'image d'une source.

a) Convertir $1''$ en radians.

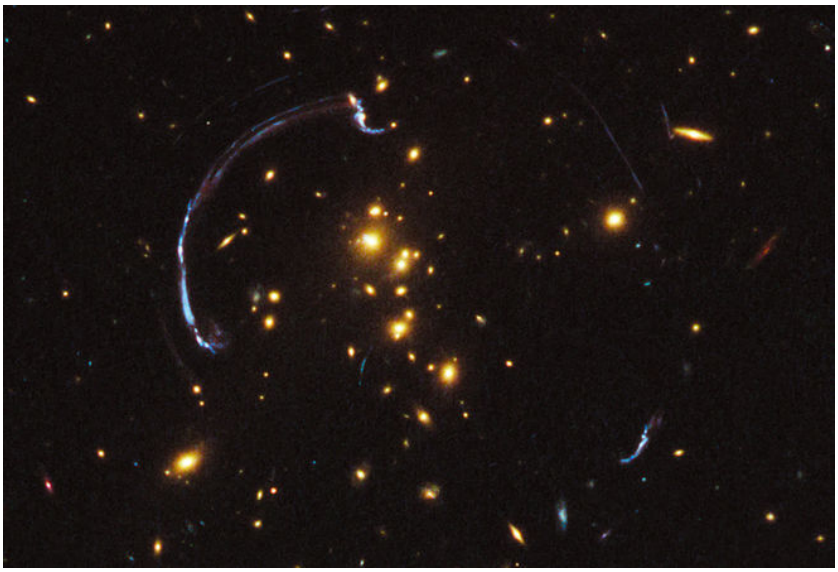
b) Calculer le paramètre d'impact d qu'un rayon de lumière doit avoir pour que la Lune produise une déviation $\alpha \approx 1''$.

c) Pourquoi la Lune ne peut pas produire un effet de lentille gravitationnelle observable ? Quel devrait être l'ordre de grandeur de sa densité pour qu'elle produise un effet de lentille observable ?

Crédit : http ://www.worldmapsonline.com

Exercice 4. RCS2 032727-132623

L'image suivante a été prise par le télescope Hubble en 2012. En jaune brillant, au centre, on observe l'amas de galaxies RCS2 032727-132623, à environ 2 Gpc de nous.



Crédit : NASA, ESA, J. Rigby, K. Sharon, M. Gladders e E. Wuyts,
http ://www.space.com/14481-hubble-photo-brightest-galaxy-gravitational-lens.html.

a) Indiquer les indices permettant d'affirmer que cet amas est une lentille gravitationnelle. Expliquer sa réponse par un schéma en indiquant la trajectoire des rayons de lumière jusqu'à l'observateur.

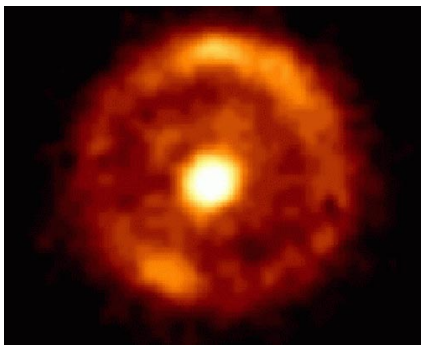
b) De quel type d'effet de lentille gravitationnelle s'agit-il ? Justifier.

c) Pourquoi n'observe-t-on pas d'anneau d'Einstein dans ce cas ?

d) Peut-on distinguer des images de la même source ?

Exercice 5. L'anneau d'Einstein

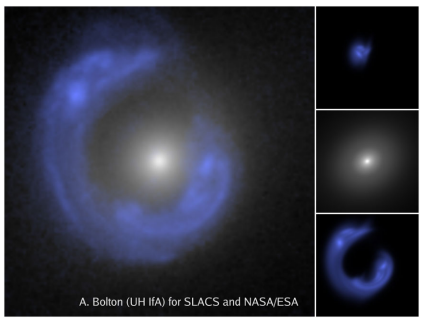
Le premier anneau d'Einstein, B1938+666, fut observé en 1998. Même si l'image (figure ci-contre) est seulement d'environ 1 seconde d'arc, le diamètre de l'anneau mesure en réalité de dizaines de kpc. La figure ci-dessous date aussi de 1998 et est l'image de la galaxie SDSSJ1430 (en bleu) vue au travers d'une lentille gravitationnelle (en blanc au centre on voit la galaxie, beaucoup plus proche, qui joue le rôle de lentille).



Crédit : http ://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/einring.html.

Les images de droite, du haut en bas représentent respectivement :

1. une reconstruction numérique de comment devrait apparaître l'image de la source sans lentille,
2. la lentille toute seule et
3. l'image déformée seule.



Crédit : http ://apod.nasa.gov/apod/ap080728.html.

a) Expliquer dans quelles conditions nous pouvons observer ce type d'images.

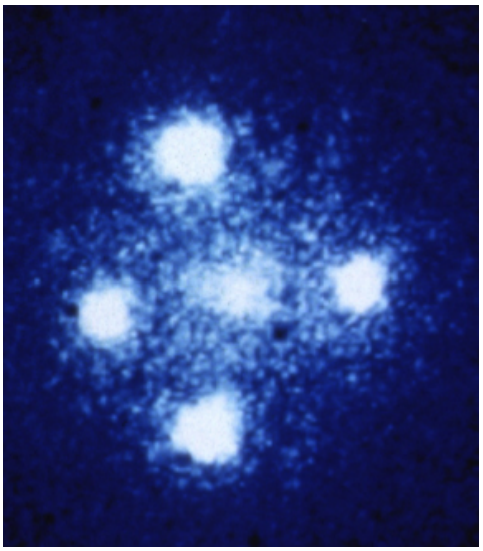
b) Les astrophysiciens utilisent ces observations pour estimer la masse de la lentille en mesurant les redshifts pour la lentille $z_L = 0,285$ et pour la source $z_S = 0,575$, ainsi que le rayon d'Einstein $\theta_E = 1,51''$. Utiliser ces données pour calculer la masse de la lentille. Donner le résultat en kg et en masses solaires $M_\odot$. *Ne pas oublier de convertir θ en radians.*

c) Combien de chiffres significatifs a ce résultat ? Quelles sont les sources d'incertitude ?

d) Pourquoi ce type d'estimation de masse à de grandes échelles sont importantes pour la cosmologie ?

Exercice 6. La croix d'Einstein

La photo de la croix d'Einstein ci-contre date de 1990. Les 4 images qui forment la croix ont un redshift de 1,7, ce qui correspond à la distance de 3 Gpc, alors que la galaxie au centre a un redshift de 0,0394. De plus, on a mesuré la distance angulaire moyenne entre les quatre images de la croix et le centre, que nous pouvons considérer comme une bonne estimation du rayon d'Einstein associé : 0,8 seconde d'arc.



Crédit : NASA, ESA, e STScI

a) Expliquer (1) quel est le phénomène à la base de cette observation, (2) quelles sont les conditions pour que cette image en forme de croix se produise.

b) En utilisant la loi de Hubble, vérifier que la distance de la galaxie au centre de l'image est de 0,2 Gpc.

c) En déduire la distance entre la galaxie au centre (L) et la source des 4 images (S).

d) Déterminer le rayon d'Einstein de cette image en radians.

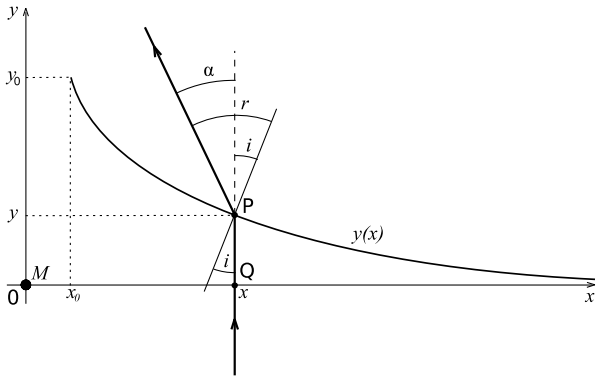
e) Ecrire la formule reliant ce rayon d'Einstein à la masse de la galaxie au centre de l'image.

f) En déduire une estimation de la masse de la galaxie au centre de l'image en kg, puis en masses solaires.

Exercice 7. Pourquoi un verre à vin ?

a) On peut simuler le l'effet de lentille forte en utilisant une lentille optique (en plexiglas par exemple), à condition que son profil soit bien choisi. Expliquer pourquoi un profil biconvexe n'est pas convenable.

Considérons une lentille optique d'indice de réfraction n, dont la forme est celle d'un pied de verre à vin. Nous voulons savoir quel devrait être son profil pour qu'elle simule une lentille gravitationnelle ponctuelle de masse M, située à l'origine des coordonnées. Le graphique ci-dessous à gauche représente la lentille souhaitée : sa base est plate (l'axe des x) et son profil est donné par une fonction $y(x)$ inconnue (voir photo à droite).



b) Imaginons un rayon de lumière incident perpendiculairement à la base de la lentille en un point générique Q assez éloigné du centre, de coordonnées $(x; 0)$. Le rayon ne subit pas de déviation en ce point, pourquoi ?

c) Par contre il est dévié au point P $(x; y(x))$, à la sortie du milieu. Ecrire la loi de la réfraction reliant les angles r, i et l'indice de réfraction n, avec l'approximation $\sin(r) \cong r$ et $\sin(i) \cong i$ (car $r \ll i$ et $i \ll 1$).

d) En sachant que $r = i + \alpha$, où

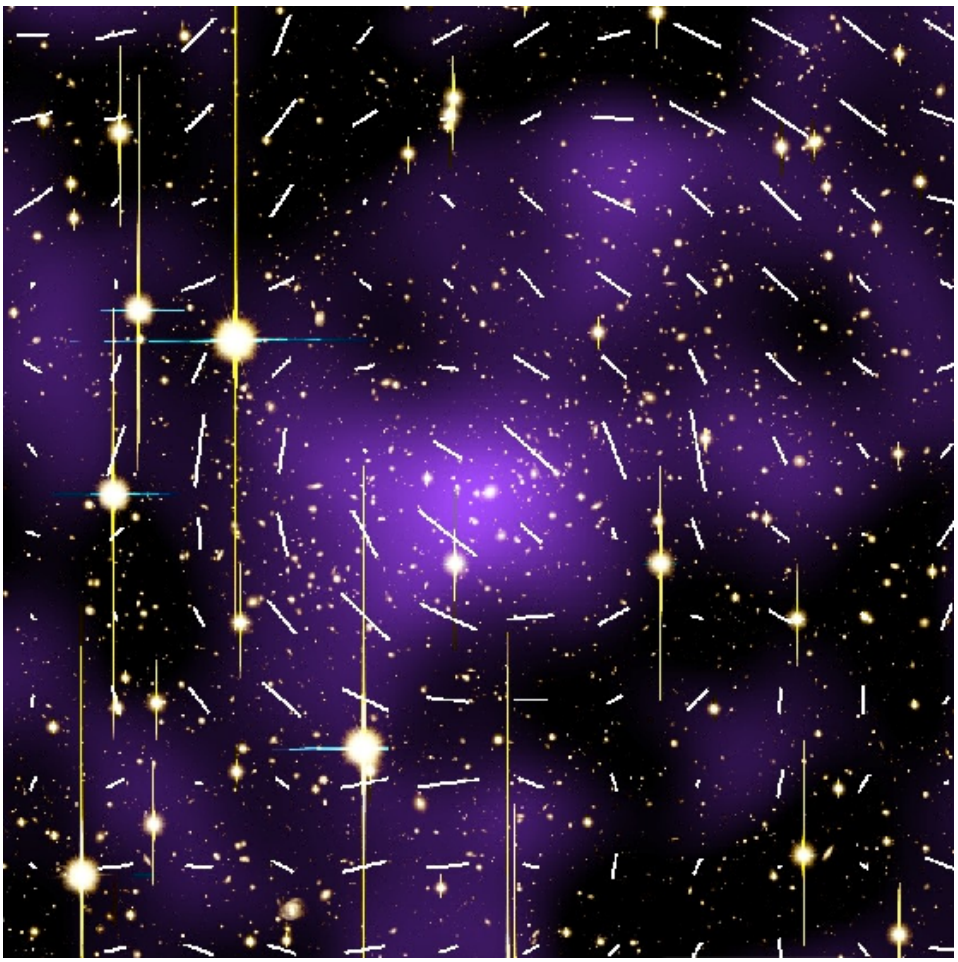
$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 x}$$

est la déviation souhaitée pour le rayon de lumière (déviation *inversement* proportionnelle à la distance de passage entre le rayon et la masse M), et en utilisant l'équation trouvée au point (c), écrire la relation entre i, n et α, puis expliciter i en fonction de G, M, c, x et n. Puisque G, M, c et n sont des constantes, nous avons trouvé comment doit varier l'angle d'incidence en fonction de x : $i(x)$.

e) Puisque i est l'angle entre le rayon incident (vertical) et la normale à la courbe $y(x)$ au point P, la tangente à cette courbe en ce point est $y'(x) = dy/dx = -i(x)$. Remplacer l'expression obtenue au point (d) pour $i(x)$ puis intégrer cette équation pour trouver le profil $y(x)$.

Exercice 8. A2390

Voici une image de l'amas de galaxies A2390. La taille angulaire de cette image est de 12' × 12', et dans chaque cellule (1' × 1') des lignes ont été ajoutées.



Crédit : Oguri, Masamune et al. MNRAS. 405 (2010) 2215-2230 arXiv :1004.4214 [astro-ph.CO]
(https ://inspirehep.net/record/853072/plots)

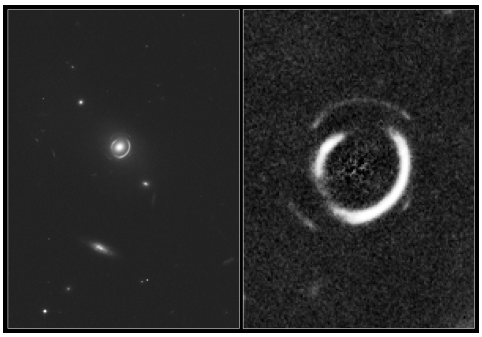
a) Peut on dire qu'un effet de lentille gravitationnelle est présent dans cette image ? Si oui dire de quel type de lentille s'agit-il. Dans tous les cas, justifier sa réponse.

b) Que représentent les lignes ajoutées dans chaque cellule de l'image ?

c) Que représentent les zones coloriées en violet (plus clairs) ?

Exercice 9. Double anneau

L'image ci-dessous montre un phénomène unique, observé récemment [7] par le satellite Hubble. Il s'agit de deux anneaux concentriques autour d'une même lentille, constituée d'une galaxie naine de redshift $z_L = 0,222$ (la source brillante au centre de l'image de gauche). Le rayon d'Einstein du premier anneau est $\theta_1 = 1,43''$ et son redshift est $z_1 = 0,609$. Pour le deuxième anneau, moins visible, on a mesuré $\theta_2 = 2,07''$ et $z_2 \approx 3$.



Crédit : https ://esahubble.org/news/heic0803/ et https ://en.wikipedia.org/wiki/SDSSJ0946%2B1006

a) Répondre aux trois points suivants sur cette image :
   — Quel type d'effet de lentille gravitationnelle est à la base de cette observation et pourquoi ?
   — Quelles sont les conditions permettant la formation de cette image d'anneaux ? Faire un dessin précis de la trajectoire des rayons des sources.
   — La source du deuxième anneau ne serait pas observable sans l'effet de lentille. Pourquoi ?

b) À partir des redshifts de la lentille et du premier anneau, calculer les distances
   1. entre l'observateur et la lentille (D_{LO}) ;
   2. entre l'observateur et la source du premier anneau (D_{SO}) ;
   3. en déduire la distance entre la lentille et la source du premier anneau (D_{SL}).

c) En utilisant les données relatives au premier anneau, calculer la masse de la lentille en kg, puis en $M_\odot$.

d) De quel type de matière est composée la masse trouvée au point (c) ?

e) Quel autre type de lentille gravitationnelle utilise-t-on pour déterminer la distribution de la matière non lumineuse dans l'espace *entre* les galaxies ?

7. R. Gavazzi *et al.*, *The Sloan Lens ACS Survey. VI : Discovery and analysis of a double Einstein ring* (2008), https://arxiv.org/abs/0801.1555.

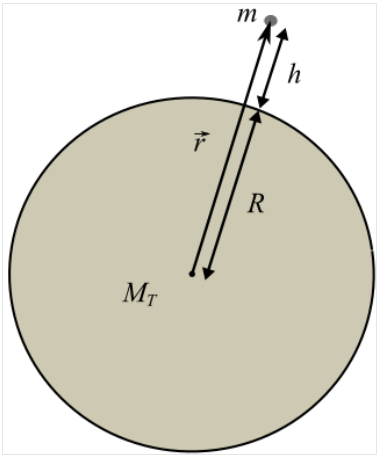
5 Trous noirs

Exercice 1. Energie potentielle gravitationnelle

Dans le cours de mécanique, vous avez appris que l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet à la surface de la Terre est donnée par $E_g(h) - E_g(0) = E_g(r) - E_g(R) = mgh$ où et m la masse de l'objet et h est son hauteur par rapport à la surface terrestre. On peut aussi écrire $h = r - R$ où r est la distance du centre de la Terre et R le rayon de la Terre.

Cette formule est valable seulement si h est négligeable par rapport au rayon de la Terre. De cette manière $g = GM_T/r^2$ peut être considéré comme constant, en effet :

$$r = R + h \cong R \qquad \Rightarrow \qquad g \cong \frac{G\,M_T}{R^2}\,.$$



Sinon, il faut utiliser l'expression plus générale pour l'énergie potentielle gravitationnelle donnée par

$$E_g(r) = -\frac{GM_T m}{r}\,.$$

Démontrer que si $h \ll R \quad \Rightarrow \quad r = R + h \cong R$, alors $E_g(r) - E_g(R) \cong mgh$, où $g = GM_T/R^2$, selon la définition de l'accélération de la gravité terrestre.

Suggestion : développer la différence algébriquement

$$E_g(r) - E_g(R) = -\frac{GM_T m}{r} + \frac{GM_T m}{R} = -\frac{GM_T m}{R+h} + \frac{GM_T m}{R}$$

$$= \frac{\dots}{(R+h)\cdot R} = \dots \cong mgh\,.$$

Exercice 2. Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération pour un objet lancé depuis :

1. la surface de la Terre,
2. la surface de Mars,
3. la surface de la Lune.

Exercice 3. La composition chimique de l'atmosphère des planètes

La température (en K) d'un gaz parfait est directement proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de ses particules. Si nous négligeons les mouvements de vibration et de rotation des particules, cette proportionnalité se traduit par la relation

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{3}{2} k_B T$$

où k_B est la costante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Annexe E).

a) En utilisant la formule de l'énergie cinétique d'une particule de masse m et vitesse v et la relation de proportionnalité entre E_{k} et T, exprimer la vitesse moyenne des particules d'un gaz en fonction de la température du gaz et de la masse des particules : $v_T(m;T)$. Cette vitesse s'appelle ***vitesse thermique*** du gaz.

b) Calculer la valeur de la vitesse thermique de la molécule d'oxygène à la température moyenne à la surface de la Terre (15 °C), notée $v_T(\mathrm{O}_2; 15\ ^\circ\mathrm{C})$. Est-ce que cette vitesse est plus grande ou plus petite pour l'hydrogène H_2 ? Et pour l'azote N_2 ? *Pour l'hydrogène et l'azote répondre sans effectuer des calculs.*

c) Comparer cette vitesse avec la vitesse de libération terrestre, en calculant le rapport

$$\eta_{\mathrm{Terre}} = \frac{v_T(\mathrm{O}_2; 15\ ^\circ\mathrm{C})}{v_{\text{libération Terre}}}.$$

d) Effectuer les mêmes calculs qu'aux points (b) et (c) pour la Lune à l'époque de sa formation – il y a 4 milliards d'années – quand sa température moyenne était d'environ 2000 °C (1 seul chiffre significatif).

e) Expliquer pourquoi la Lune n'a pas d'atmosphère.

Lien utile pour les prochains exercices, avec une table des ODG de densités connues : https://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_(density)

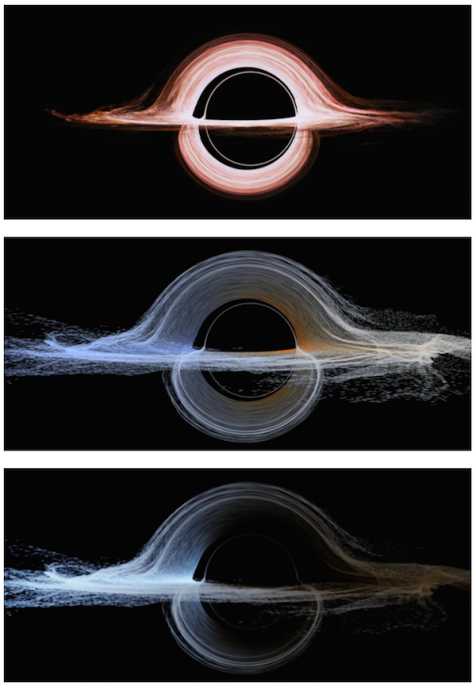
Vidéos :

— Simulation de la collision entre deux trous noirs
http://apod.nasa.gov/apod/ap151020.html

— Etoile engloutie par un trou noir :
http://apod.nasa.gov/apod/ap151028.html

Exercice 4. Le rayon de Schwarzschild

La figure suivante montre Gargantua, le trou noir du film « Interstellar » : comment il est apparu dans le film (image du haut), et selon le résultat de la simulation numérique à partir des équations de la relativité générale (les deux images du bas). Dans les trois images, le trou noir est en rotation (dans le sens antihoraire en le regardant depuis le haut) avec son disque d'accrétion, constitué de matière rayonnante en train de précipiter, et tournant également à des grandes vitesses.



Crédit : O. James *et al.*, Class. Quantum Grav. 32 065001 (2015).

a) Indiquer où se trouve le rayon de Schwarzschild dans chacune des images de Gargantua, et expliquer pourquoi l'image du trou noir est enveloppée par dessous et par dessus d'un disque lumineux.

b) Expliquer pourquoi dans les images plus réalistes issues de la simulation, le disque d'accrétion présente des nuances en bleu ou en rouge.

c) Calculer le rayon de Schwarzschild de Gargantua, dont la masse est 100 millions de fois celle du Soleil.

d) Faire le même calcul qu'au point (c) pour un trou noir de masse égale à celle du Soleil, puis à celle de la Terre.

e) Quelle devrait être la densité de la Terre si toute sa masse était concentrée à l'intérieur de son rayon de Schwarzschild ? Connaît-on des objets avec cette densité ?

Exercice 5. Le trou noir supermassif dans Sgr A*

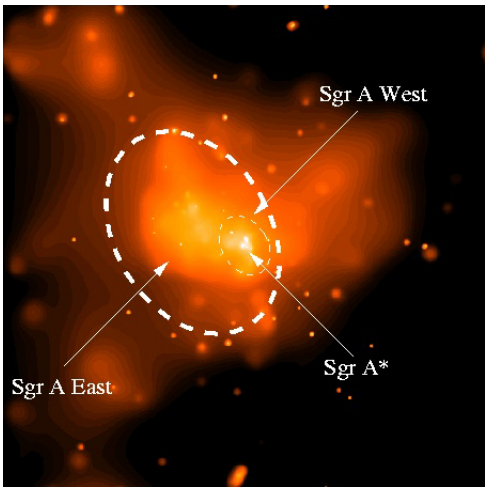
Admettons que le mouvement de S2 est circulaire et uniforme (MCU) de rayon $r \approx 1000$ UA – soit 10 fois plus grand que son périhélie – et que sa vitesse scalaire est constante et égale à la vitesse scalaire moyenne sur une orbite : $v = v_m \approx 2 \cdot 10^6$ m/s (voir l'exercice relatif dans la série 1). De plus, on sait que la masse de cette étoile est de plusieurs ordres de grandeur plus petite que celle du trou noir au centre de l'orbite : $m \ll M$.

a) En utilisant les lois de Newton pour le MCU, estimer la masse contenue à l'intérieur de l'orbite de S2, en kg et en $M_\odot$.

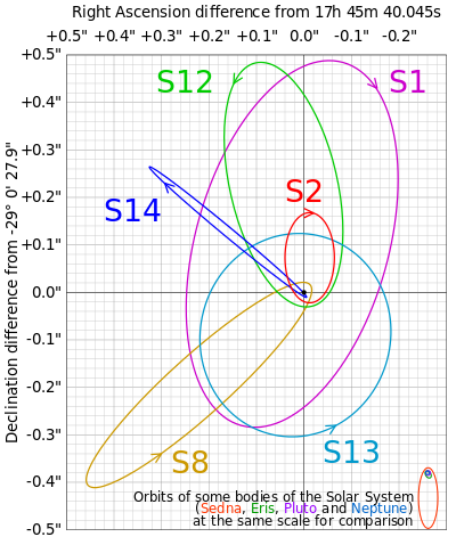
b) Calculer le rayon de Schwarzschild d'une telle masse et le comparer au rayon de l'orbite de S2.

c) Nous savons que le périhélie d'une autre étoile orbitant autour du trou noir supermassif, S14 (connue aussi sous le nom de S0-16), est de 45 UA. Pourquoi peut-on affirmer que la masse contenue à l'intérieur de l'orbite de ces deux étoiles est un trou noir ?

Les astronomes ont pu suivre une rotation complète de S2 autour de Sgr A*, depuis 1995 jusqu'en 2010, ce qui leur a permis d'estimer la masse du trou noir supermassif dans le noyau de notre galaxie à environ $4,2 \cdot 10^6$ $M_\odot$. Cette découverte a été honorée par le prix Nobel en physique de 2020.
https://www.e-education.psu.edu/astro801/content/l8_p7.html.



Crédit : NASA Chandra X-Ray Observatory et Penn State University.



Crédit : By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=15252541.

Exercice 6. Notre univers est-il un trou noir ?

a) Ecrire la formule exprimant la densité moyenne d'un trou noir en fonction de sa masse $\rho_{\text{tn}}(M)$. S'agit-il d'une fonction de M constante, croissante ou décroissante ?

b) À partir de cette formule déterminer l'ordre de grandeur de la densité d'un trou noir avec une masse égale à

1. une tonne : $\rho_{\text{tn}}(1\text{ t})$;
2. celle de la Terre : $\rho_{\text{tn}}(M_{\text{Terre}})$;
3. celle d'une grosse étoile (environ 10 fois la masse du Soleil) : $\rho_{\text{tn}}(10\ M_\odot)$;
4. celle de Gargantua : $\rho_{\text{tn}}(10^8\ M_\odot)$;
5. celle du noyau de notre galaxie, Sgr A* : $\rho_{\text{tn}}(4,2 \cdot 10^6\ M_\odot)$;
6. celle d'une sphère de rayon égal au rayon de Hubble $r_H = c/H_0$ et de densité moyenne égale à la densité critique $\rho_c \approx 9 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/m}^3$.
   Méthode conseillée : en utilisant la densité critique, trouver d'abord la masse contenue dans le rayon de Hubble, M_H. Ensuite calculer $\rho_{\text{tn}}(M_H)$.

c) Calculer le résultat du point (6) algébriquement (résultat sous la forme d'une expression littérale), en sachant que la formule de la densité critique est (chapitre 7)

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\ .$$

Exercice 7. Température de SgrA*

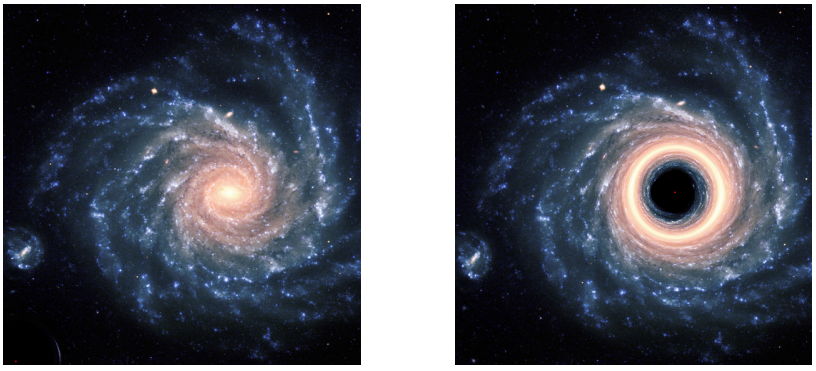
a) Quelle est la température du trou noir de Sgr A*, dans le noyau de la Voie lactée ?

b) En tenant compte de la température moyenne de l'univers, pourquoi ce trou noir ne peut pas s'évaporer actuellement ?

c) Quelle devrait être la masse d'un trou noir pour que sa température soit comparable avec celle de l'univers actuel ? Et son rayon de Schwarzschild ?

Exercice 8. La galaxie NCG1232 vue au travers d'un trou noir

Les deux images suivantes montrent la même galaxie, de redshift $z = 0,0053$. Elle est nommée NCG1232.



Crédit : http://arachnoid.com/relativity/index.html et https://fr.wikipedia.org/wiki/NGC_1232

À gauche, NCG1232 apparaît comme nous l'observons actuellement. À droite elle apparaît comme nous l'observerions si un trou noir de $4,3 \cdot 10^6$ $M_\odot$ était intercalé à mi-chemin entre nous (l'observateur, O) et NCG1232 (la source, S).

a) Répondre aux points suivants :

   1. Quel est le phénomène qui explique la formation de l'image de droite ?
   2. Dessiner un schéma indiquant les positions de S, de O et du trou noir ainsi que la trajectoire des rayons de lumière.
   3. Comment appelle-t-on le cercle lumineux observé dans l'image de droite et quelles sont les conditions pour qu'un tel cercle se forme ?
   4. Comment l'image de droite se modifierait si le trou noir n'avait pas une symétrie sphérique parfaite ?

b) Exprimer la masse du trou noir en kg (unité SI).

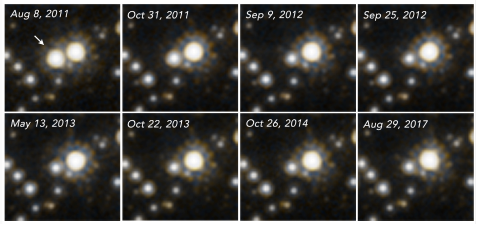
c) Calculer le rayon de Schwarzschild du trou noir et sa densité moyenne.

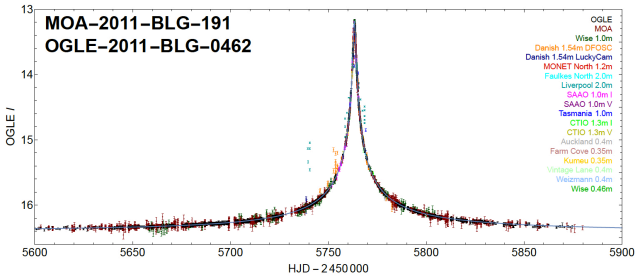
d) À partir du redshift de NCG1232, déterminer la distance entre l'observateur et la source. En déduire la distance entre l'observateur et le trou noir et celle entre la source et trou noir. Exprimer toutes ces distances en Mpc puis en m.

e) Calculer le rayon d'Einstein dans l'image de droite. Convertir le résultat en secondes d'arc.

Exercice 9. Le trou noir solitaire

Les images suivantes sont issues d'une étude [8] publiée en juillet 2022. La première est une séquence de clichés d'une même étoile (appelée « OGLE-2011 » et indiquée par la flèche dans la première photo en haut à gauche) à des différentes dates entre 2011 et 2017. On y observe que sa luminosité a eu une augmentation soudaine en août 2011, qui s'est ensuite estompée dans les mois suivants. La deuxième est le graphique relatif de la luminosité de l'étoile en fonction du temps sur 300 jours, centré sur août 2011.





Cette augmentation de luminosité s'explique par l'effet de lentille gravitationnelle créé par le passage, entre nous et OGLE-2011 (la source), d'un trou noir appelé « MOA-2011 ». Le tableau ci-dessous – de la même étude – résume les données [9] concernant cet événement.

Table 6. Properties of the MOA-11-191/OGLE-11-462 Black Hole Lens

Property	Value	Sources & Notes[a]
Mass, $M_{\rm lens}$	$7.1 \pm 1.3\,M_\odot$	(1)
Distance, D_L	1.58 ± 0.18 kpc	(2)
Einstein ring radius, $\theta_{\rm E}$	5.18 ± 0.51 mas	(3)
Proper motion, (μ_α, μ_δ)	$(-4.36 \pm 0.22, +3.06 \pm 0.66)$ mas yr^{-1}	(4)
Galactic position, (X, Y, Z)	$(-4, -1580, -45)$ pc	(5)
Space velocities, (V, W)	$(+3, +40)$ km s^{-1}	(6)

À partir des données du tableau, répondre aux points suivants :

a) De quel type d'effet de lentille gravitationnelle s'agit-il et pourquoi ?

b) Est-ce que la lentille de ce système se trouve dans notre galaxie ? Justifier à partir des données du tableau *sans* effectuer des calculs.

c) Est-ce que, à cette distance de nous, l'expansion de l'univers peut être négligée ? Justifier.

8. Kailash C. Sahu *et al.*, *An Isolated Stellar-mass Black Hole Detected through Astrometric Microlensing*, https://arxiv.org/abs/2201.13296.

9. mas = millième de seconde d'arc

d) Comment classifie-t-on les trous noirs et à quelle de ces catégories appartient MOA-2011 ?

e) Calculer (1) le rayon de Schwarzschild et (2) la masse volumique moyenne de MOA-2011.

f) Quel serait l'ODG de la masse volumique d'un trou noir 1000 fois plus massif que MOA-2011 ?

g) Calculer la température de MOA-2011. Peut-il s'évaporer dans notre univers ?

Exercice 10 : Temps d'évaporation

Lorsqu'on se limite uniquement à la physique classique (newtonienne ou relativiste), un trou noir est un objet qui attire toujours de la masse/énergie et qui n'en libère aucune. Nous avons l'impression que toute information physique contenue dans ce qu'il avale est « perdue », sauf trois grandeurs physiques (indépendantes), qui définissent cet objet.

a) Quelles sont ces trois grandeurs ?

b) Déterminer l'ordre de grandeur du temps d'évaporation d'un trou noir de (1) $M_{\text{in}} = 1$ kg, (2) $M_{\text{in}} = M_{\text{Terre}}$ et (3) $M_{\text{in}} = M_{\odot}$.

c) Quelle devrait être la masse initiale d'un trou noir pour qu'il s'évapore en une durée de l'ordre de l'âge de l'univers, $t_{\text{évap}} \sim 10^{10}$ années ?

Exercice 11. Le trou noir du CERN

Le LHC (Large Hadrons Collider), au CERN, peut accélérer des protons jusqu'à leur faire atteindre une énergie cinétique de $E_k = 13$ TeV.

a) Convertir cette énergie en Joules.

b) S'il était possible de convertir entièrement toute cette énergie cinétique en énergie de masse, quelle serait la masse de la particule ainsi créée ?

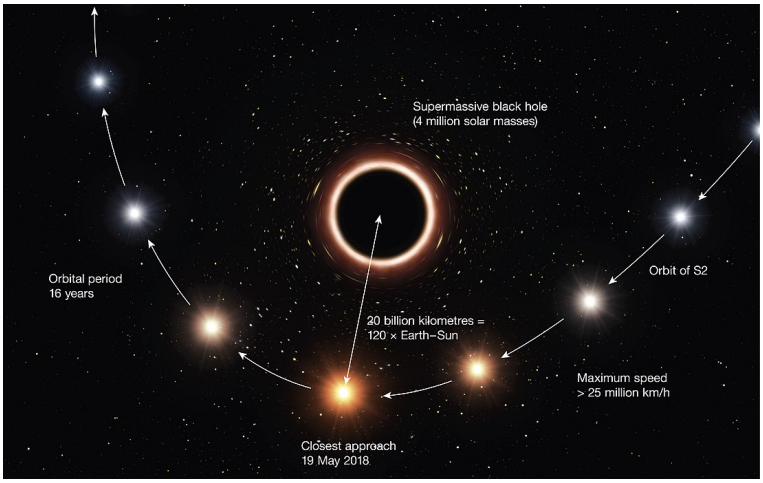
c) Quels seraient le rayon de Schwarzschild et la densité d'un trou noir de telle masse ?

d) Quelle serait l'ordre de grandeur du temps d'évaporation d'un tel trou noir ?

Vidéo de la simulation d'un hypothétique trou noir stable fabriqué au CERN :
http://www.dailymotion.com/video/x7erd3_le-trou-noir-du-cern_tech

Exercice 12. Orbites elliptiques autour de Sgr A*

À partir de l'orbite elliptique de certaines étoiles autour du centre de la Voie lactée les astronomes ont pu déterminer la présence du trou noir Sgr A*. En particulier, l'orbite de l'étoile S2 (la reconstruction de la figure ci-dessous en montre une partie) a été suivie sur toute sa période de 16,05 années, entre 1995 et 2011. Son périhélie est à une distance $r_p = 1,761 \cdot 10^{13}$ m et son excentricité est $e = 0,885$.



Crédit : ESO/M. Kornmesser.

a) À partir des données de l'orbite de S2, déterminer la masse de Sgr A*. Exprimer le résultat en kg et en masses solaires.

b) De quel type de trou noir s'agit-il ?

c) Calculer l'intensité des vitesses de S2 à son périhélie et à son aphélie.

d) Quel est le rayon de Schwarzschild de Sgr A* ? Exprimer le résultat en m et en rayons solaires ($R_\odot = 6,96 \cdot 10^8$ m).

e) Calculer la densité moyenne de Sgr A* et la comparer avec celle d'un trou noir stellaire.

f) Quelle est la température de Hawking de Sgr A* ? Peut-il s'évaporer dans notre univers actuel ?

g) Si la température environnante était assez basse, combien de temps faudrait-il pour que Sgr A* s'évapore entièrement (donner l'ordre de grandeur) ? Comparer le résultat trouvé à l'ordre de grandeur de l'âge de l'univers (14 milliards d'années).

Exercice 13. Décalage temporel des GPS

Les satellites GPS gravitent autour de la Terre à une hauteur $h = 20,2 \cdot 10^6$ m de sa surface. Leur vitesse est en moyenne de $3,89 \cdot 10^3$ m/s. Nous souhaitons trouver quel est le décalage temporel, à chaque seconde, des montres d'un observateur à la surface terrestre (que l'on considère au repos) par rapport à une montre voyageant sur un satellite GPS.

Effet de la relativité restreinte

a) Calculer quel est, à chaque seconde, le retard pris par la montre du satellite GPS par rapport à celle d'un observateur sur Terre à cause de la vitesse du satellite.

Effet de la relativité générale

b) Calculer quel est, à chaque seconde, le retard pris par la montre d'un observateur à la surface terrestre par rapport à un observateur dans l'espace à une distance infinie de la Terre et de toute autre masse, à cause de la gravitation.

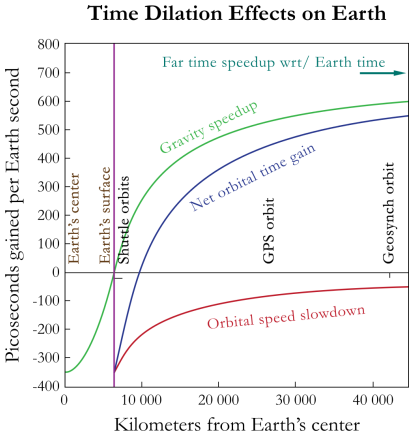
c) Faire le même calcul qu'au point (b), mais pour le retard pris par la montre du satellite GPS par rapport à un observateur dans l'espace à une distance infinie de la Terre et de toute autre masse.

d) À partir des résultats des deux points précédents, déduire l'avance prise à chaque seconde par la montre du satellite GPS par rapport à celle d'un observateur sur Terre.

Effet relativiste global

e) En combinant les effets de la relativité restreinte et générale, quel est le bilan du décalage de la durée mesurée par un satellite GPS par rapport à un observateur sur Terre ?

f) Si on augmente la distance des satellites de la surface terrestre h, est-ce que les effets des contributions prévenantes (i) de la relativité restreinte, (ii) de la relativité générale et (iii) au total augmentent ou diminuent ? Comparer les résultats avec le graphique suivant.



Crédit : P. Fraundorf Derivative work, Spotsaurian
https://en.wikipedia.org/wiki/Error_analysis_for_the_Global_Positioning_System#/media/File:Orbit_times.svg ;

voir aussi : https://demonstrations.wolfram.com/RelativisticEffectsOnSatelliteClockAsSeenFromEarth/

Exercice 14. Voyage dans le temps

Un enseignant de 55 ans imagine partir en orbite à une distance de 5 km de la surface d'une étoile de neutrons pour deux jours afin de déterminer l'effet rajeunissant (temporel) de la gravité.

a) En assumant qu'il arrive à survivre à l'effet déchirant (effet de marée) qu'il subirait, de combien de temps aurait-il rajeuni à son retour par rapport aux terrestres ?

b) Où faudrait-il aller pour avoir le même effet temporel, mais sans les effets déchirants des marées gravitationnelles ?

c) À quelle distance de la surface des événements d'un trou noir de 10 $M_\odot$ devrait séjourner cet enseignent pendant une année pour qu'à son retour les élèves de 16 ans aient son âge ?

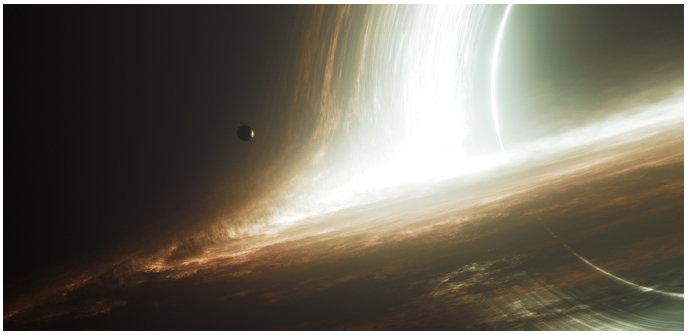
d) Si, pendant le séjour, il envoie un « selfie » à ses élèves, à la fréquence de 20 MHz, à quelle fréquence ce signal devra être détecté sur Terre ?

Exercice 15. Le retour de Cooper

En 2170, le pilote Cooper retourne visiter le trou noir Gargantua ($M = 1,0 \cdot 10^8 M_\odot$). Il parcourt l'aller et le retour depuis la Terre dans une navette qui voyage à la vitesse constante de $0,90\,c$ par rapport au Système solaire. Selon la montre du pilote, l'aller dure 1h 30', ensuite Cooper se maintient à une distance $r = 3,0 \cdot 10^8$ km du centre du trou noir pendant 2h45'. Il rentre enfin sur Terre à la même vitesse qu'à l'aller pendant 1h30' (toujours selon sa montre).

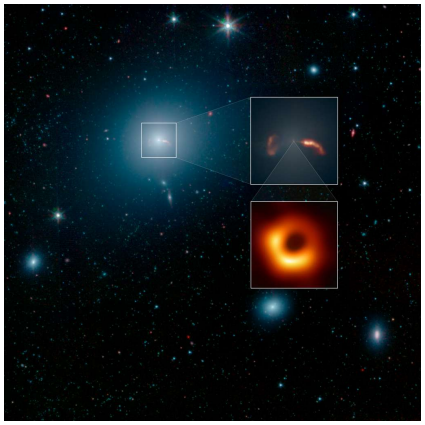
a) Quelle durée s'est écoulée pour un observateur au repos sur Terre pendant l'absence de Cooper ?

b) Quelle est la distance entre la Terre et Gargantua, dans le référentiel du Système solaire ? Exprimer le résultat en m et en UA $= 1,5 \cdot 10^{11}$ m.



Exercice 16. Messier 87*

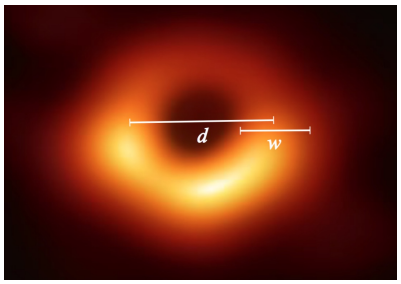
L'image ci-contre représente une vue d'ensemble de la galaxie Messier 87 (M87) et de ses voisines. Du centre de cette galaxie jaillissent deux jets de particules opposés que l'on peut observer dans le premier agrandissement (en haut), en rouge et orange.
Le deuxième agrandissement (en bas) représente l'image de la source d'ondes radio M87*, contenant le trou noir supermassif à l'origine de ces jets. La radiation observée est celle envoyée par le disque d'accrétion du trou noir en rotation. L'axe de rotation du trou noir par rapport à l'observateur (la Terre) est indiqué dans le schéma suivant.



Crédit : NASA, JPL-Caltech, IPAC, Event Horizon Telescope (EHT).

a) Expliquer ce qu'est un trou noir supermassif : en quoi se différencie-t-il d'un trou noir stellaire ?

b) Expliquer pourquoi l'image du disque d'accrétion est un anneau, même si son axe de rotation ne pointe pas vers l'observateur. De quel phénomène s'agit-il ? (Faire un schéma si nécessaire.)



Crédit : Jifeng, L. *et al.*, Nature, Vol. 575, 618–621 (2019).

Pour les calculs qui suivent, utiliser les données ci-dessous :

Masse du trou noir : $M = 6,5 \cdot 10^9 M_\odot$

Distance entre la Terre et M87* : $D = 16,8$ Mpc

The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (17pp), 2019 April 10

Table 1
Parameters of M87*

Parameter	Estimate
Ring diameter [a] d	42 ± 3 μas
Ring width [a]	<20 μas
Crescent contrast [b]	>10:1
Axial ratio [a]	<4:3
Orientation PA	150°–200° east of north
$\theta_g = GM/Dc^2$ [c]	3.8 ± 0.4 μas
$\alpha = d/\theta_g$ [d]	$11^{+0.5}_{-0.3}$
M [e]	$(6.5 \pm 0.7) \times 10^9 M_\odot$
Parameter	**Prior Estimate**
D [e]	(16.8 ± 0.8) Mpc
M(stars) [e]	$6.2^{+1.1}_{-0.6} \times 10^9 M_\odot$
M(gas) [e]	$3.5^{+0.9}_{-0.3} \times 10^9 M_\odot$

Notes.
[a] Derived from the image domain.
[b] Derived from crescent model fitting.
[c] The mass and systematic errors are averages of the three methods (geometric models, GRMHD models, and image domain ring extraction).
[d] The exact value depends on the method used to extract d, which is reflected in the range given.
[e] Rederived from likelihood distributions (Paper VI).

Diamètre (angulaire) de l'anneau d'Einstein = Ring diameter : $d = 42 \cdot 10^{-6}$ ″
Epaisseur (angulaire) de l'anneau d'Einstein = Ring width : $w = 20 \cdot 10^{-6}$ ″

c) Exprimer, en radians,
   - le rayon d'Einstein θ_E ;
   - le rayon angulaire de la zone d' « ombre » à l'intérieur de l'anneau, θ_{ombre}.

d) Calculer le rayon de Schwarzschild du trou noir en mètres.

e) Est-ce que la surface des événements du trou noir est à l'intérieur de la zone d' « ombre » ?

f) Quelle est la densité du trou noir ? Quelle(s) substance(s) ont une densité de même ordre de grandeur ?

g) Calculer la température de Hawking de ce trou noir. Comparer cette température à la température moyenne de l'univers : est-ce que ce trou noir peut s'évaporer en émettant de la radiation Hawking ?

6 Equations cosmologiques

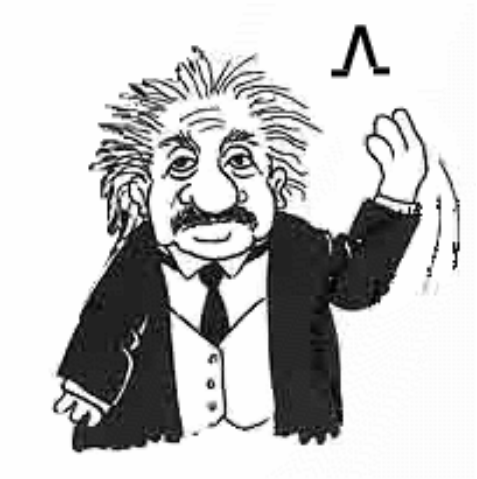
Exercice 1. La constante cosmologique d'Einstein

a) Réécrire la première équation cosmologique dans un univers dominé uniquement par la matière, en explicitant le terme contenant la vitesse du facteur d'échelle : $\dot{a}^2(t)$. Expliquer pourquoi aujourd'hui, au temps t_0, cette équation n'admet pas de solution statique. On rappelle que $a(t_0) = a_0 = 1$.

Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, l'idée que l'univers ne soit pas statique était difficile à accepter. Pour cette raison, Einstein introduit un terme à la première équation cosmologique, appelé constante cosmologique : Λ_E .

b) Réécrire la première équation cosmologique pour un univers dominé par la matière, en ajoutant le terme Λ_E. Quelle devrait être la valeur de Λ_E aujourd'hui (au temps t_0) pour que l'univers soit statique ? Est cette valeur positive ou négative ?
Pour la densité de matière aujourd'hui, en incluant la matière noire, prendre $\rho_{m0} \approx 1 \cdot 10^{-27}$ kg/m^3.

c) Montrer que, même si aujourd'hui l'univers était statique ($\dot{a}(t_0) = 0$), il serait instable : une valeur de la vitesse infinitésimale ($\dot{a}(t_0) = \epsilon \ll 1$) impliquerait une accélération $\ddot{a}(t_0)$ non nulle. Qu'en déduire ?
Pour obtenir l'accélération du facteur d'échelle, dériver la première équation cosmologique par rapport au temps.



Exercice 2. La bonne distance

a) Pour une même source de redshift z_s donné, écrire les formules de
   1. la distance comobile D_0 ,
   2. la distance propre au moment de l'émission D_{em} et
   3. la distance de traversée D_T .

b) Cocher la bonne réponse en justifiant le choix effectué.
   La distance traversée D_T est
   - ☐ plus petite que D_{em} .
   - ☐ entre D_{em} et D_0 .
   - ☐ plus grande que D_0 .

c) Effectuer l'intégrale pour chacune des formules écrites au point (a), dans le cas où $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$ et trouver quel la limite de la fonction obtenue lorsque $z_s \to \infty$.

d) Les approximations faites au point (c) sont-elles raisonnables pour les galaxies les plus lointaines, à $z_s \approx 10$?

e) Calculer la quantité $D_T(z_s)/c$ obtenue au point (c) pour $z_s \to \infty$. Que représente-t-elle ?

Exercice 3. Âge de l'univers (numérique)

Utiliser les derniers résultats [10] des mesures des paramètres H_0, Ω_m et Ω_Λ pour calculer, à partir de la formule de la distance de traversée,

a) l'âge de l'univers et

b) il y a combien de temps la constante cosmologique a commencé à dominer l'expansion (utiliser $z_\Lambda = 0,3$).

Effectuer l'intégration de manière numérique en utilisant par exemple Python, Octave ou Scilab.

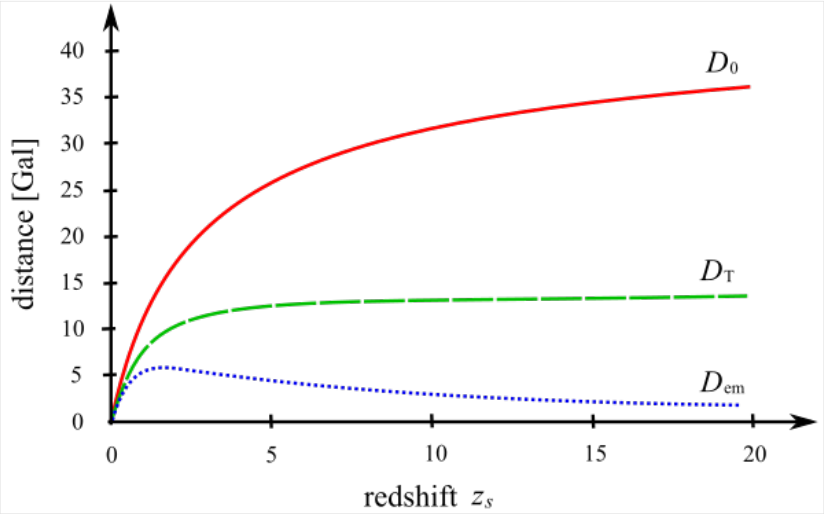
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model

Exercice 4. Evolution de la distance propre à l'émission

Le graphique ci-dessous représente, en fonction du redshift, D_0 (ligne solide rouge), D_T (ligne en vert traitillé) et D_{em} (ligne en bleu pointillé) obtenues par l'intégration numérique, avec

$$H_0 = 70 \, \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \quad , \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0,7 \quad \text{et} \quad \Omega_{m0} = 0,3 \; .$$

Si pour des petits z_s ces trois distances tendent à être les mêmes, l'écart entre elles devient de plus en plus grand pour des grands z_s, et elles commencent à se différencier avant $z_s = 1$. Comme on a déjà pu l'observer dans l'exercice 2, D_{em} tend à diminuer lorsque le redshift augmente assez.



a) Quelle explication physique peut-on donner à ce résultat ?

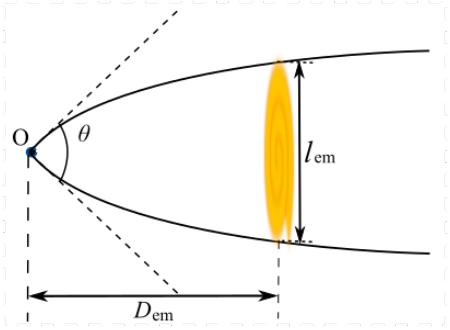
b) En supposant un univers uniquement de matière ($\Omega_m = 1$) et en utilisant les résultats de l'exercice 2, déterminer à quel redshift la distance propre au moment de l'émission serait maximale.

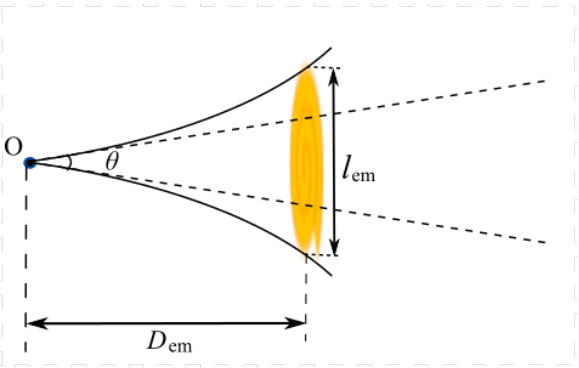
Exercice 5. Distance de diamètre angulaire $D_A(z_s)$

La *distance de diamètre angulaire* D_A est la distance apparente d'une source déduite à partir de la mesure de son diamètre angulaire θ. Elle est utilisée dans les mesures des lentilles gravitationnelles ou de tailles des fluctuations du CMB.

a) Avec quelle autre distance cosmologique coïncide D_A, dans un univers plat en expansion ? Ecrire sa formule intégrale en fonction de z_s et des paramètres cosmologiques.

b) Compléter les dessins ci-dessous pour expliquer pourquoi, dans un univers dont la courbure n'est pas nulle, D_A ne coïncide pas avec D_{em} et spécifier dans quel cas D_A est plus grande ou plus petite que D_{em}.





Exercice 6. Distance de luminosité dans un univers de matière

La formule de la distance de luminosité d'une source à redshift z_s est donnée par

$$D_L(z_s) = \frac{c\,(1+z_s)}{H_0} \cdot \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m \cdot (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \,.$$

a) Comparer D_L aux autres distances cosmologiques écrites au point (a) de l'exercice 2 : est-elle plus grande ou plus petite, pour un z_s donné ? Comment peut-on expliquer cela ?

b) Calculer l'intégrale de la distance lumineuse de manière analytique dans le cas où $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$ et trouver quelle est sa limite lorsque $z_s \to \infty$.

c) Calculer la même intégrale analytiquement dans le cas où $\Omega_m = 0$ et $\Omega_\Lambda = 1$ et trouver quelle est sa limite pour $z_s \to \infty$.

d) Quel est l'effet de Ω_Λ sur la distance de luminosité ?

Exercice 7. Ecart entre les distances cosmologiques

Les expressions pour les cinq distances cosmologiques en fonction du redshift sont des intégrales qui peuvent être résolues analytiquement en tenant compte de tous les paramètres de densité dominants Ω_m et Ω_Λ (exercice 9). Toutefois, afin de comparer facilement leurs valeurs numériques pour une source avec un redshift donné, des programmes le font de manière numérique. Par exemple le premier sur le site suivant :

https://ned.ipac.caltech.edu/help/cosmology_calc.html.

En utilisant ce programme, donner les cinq distances cosmologiques pour des sources placées respectivement aux redshifts 0,2, 2, 20 et 200. Utiliser les derniers résultats [11] des mesures des paramètres H_0, Ω_m et Ω_Λ. Que remarque-t-on ?

z_s	D_L	D_0	D_T	$D_A = D_{\text{em}}$
0,20				
2,0				
20				
200				

Exercice 8. L'énergie noire (numérique)

a) Utiliser les derniers résultats[11] des mesures des paramètres H_0, Ω_m et Ω_Λ et un langage de programmation adéquat (par exemple Python, Octave ou Scilab) pour dessiner le graphique de $D_L(z_s)$ en Mpc. *Suggestion : faire le graphique en échelle log10.*

b) Dans le même graphique, dessiner les *deux* courbes des fonctions analytiques représentant $D_L(z_s)$ pour $\Omega_m = 1$ puis pour $\Omega_\Lambda = 1$ (résultats des points (b) et (c) de l'exercice 6).

c) Dans le même graphique, dessiner les points représentant les mesures de D_L et z_S pour les 59 supernovae Ia obtenues en 1998 par l'équipe du Supernova Cosmology Project [12] reportées dans le tableau suivant, où la magnitude mesurée pour chaque supernova a été convertie en distance lumineuse.

11. https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model.
12. http://supernova.lbl.gov/

n.	D_L [Mpc]	z_s		n.	D_L [Mpc]	z_s		n	D_L [Mpc]	z_s
0	3304	0,458		20	6166	0,828		40	2366	0,416
1	2168	0,354		21	3119	0,450		41	5297	0,830
2	1932	0,425		22	3062	0,430		42	129,4	0,030
3	1600	0,374		23	3565	0,580		43	243,2	0,05
4	2344	0,420		24	5675	0,763		44	119,1	0,026
5	2051	0,372		25	3090	0,526		45	351,6	0,075
6	2377	0,378		26	783,4	0,172		46	130,6	0,026
7	3119	0,453		27	4169	0,619		47	56,75	0,014
8	3357	0,465		28	5546	0,592		48	492,0	0,101
9	3999	0,498		29	3648	0,550		49	78,70	0,020
10	3266	0,655		30	883,1	0,180		50	155,6	0,036
11	2148	0,400		31	3664	0,374		51	241,0	0,045
12	3148	0,615		32	3034	0,472		52	198,6	0,043
13	2831	0,480		33	2366	0,430		53	95,94	0,018
14	2301	0,450		34	4227	0,657		54	326,6	0,079
15	2455	0,388		35	3963	0,612		55	520,0	0,088
16	3266	0,570		36	1706	0,320		56	322,10	0,063
17	3019	0,490		37	3597	0,579		57	335,7	0,071
18	2667	0,495		38	2667	0,450		58	233,3	0,052
19	3750	0,656		39	3006	0,581				

Source : http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9812133v1.pdf

d) Que peut-on déduire de ce graphique ?

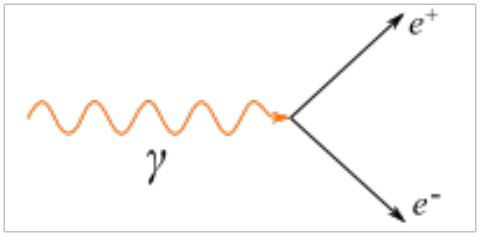
Exercice 9. Expressions analytiques des distances cosmologiques

Résoudre analytiquement les intégrales des distances cosmologiques en fonction du redshift et des paramètres de densité, en négligeant les terme de courbure et de radiation.

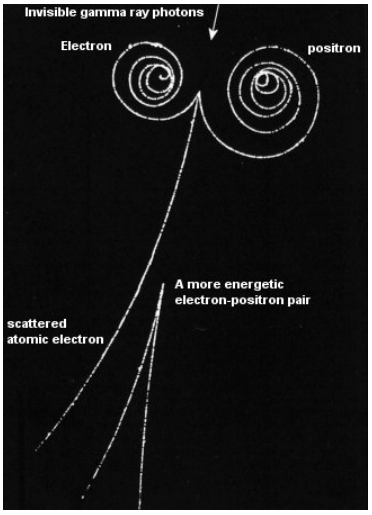
7 Chronologie du Big Bang

Exercice 1. Production de paires

a) Déterminer l'énergie minimale E d'un photon[13] pour qu'il puisse être converti en
— une paire électron-positron ($E_{\mathrm{e/po}}$) ;
— une paire proton-antiproton ($E_{\mathrm{pr/a}}$).



b) Ces valeurs sont-elles en accord avec les fourchettes d'énergies correspondantes à l'époque des annihilations des particules respectives données dans la théorie ? Sait-on pourquoi les paires de particules-antiparticules ne se sont pas complètement annihilées (aujourd'hui on observe un univers formé par des protons et des électrons mais pas d'antiparticules) ?



Crédit : https ://universe-review.ca/F15-particle02.htm

c) En sachant que la relation entre l'énergie d'un photon E et la longueur d'onde associée λ est $E = hc/\lambda$, calculer la longueur d'onde correspondante aux énergies minimales pour produire chaque paire de particule trouvée au point (a). Dans chaque cas, déterminer de quel type de radiation s'agit-il (visible, infrarouge, UV, ...).

N.B. La longueur d'onde associée à l'énergie de masse d'une particule, divisée par 2π s'appelle *longueur d'onde de De Broglie* de la particule : $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$.

d) Pourquoi, même si son énergie le permettait, un photon ne peut pas être converti en paire proton-neutron ?

13. Il s'agit de la particule associée aux ondes électromagnétiques.

Exercice 2. Energie potentielle électrique

Au chapitre 6 nous avons obtenu la formule de l'énergie potentielle *gravitationnelle* d'un système de deux masses sphériques, m_1 et m_2, dont les centres sont à une distance r.

a) Réécrire cette formule. Quel est le signe de cette énergie ?

b) En s'inspirant de l'analogie entre la loi de gravitation universelle et la loi de Coulomb, écrire une formule semblable à celle écrite au point (a) donnant l'énergie potentielle *électrique* de deux charges q_1 et q_2, dont les centres sont à une distance r. Quel est le signe de cette énergie ?

c) Utiliser la formule écrite au point (b) et les données dans l'Annexe A pour calculer l'énergie potentielle électrique d'un proton et un électron dans un atome d'hydrogène. Quelle serait cette énergie, si au lieu d'avoir un système proton-électron, on avait un système proton-proton, à la même distance ?

d) En supposant que l'électron suit une orbite circulaire autour du noyau [14] et en utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer la formule de sa vitesse orbitale en fonction de e, r, m_e et k.

e) En déduire la formule de son énergie cinétique et celle de son énergie mécanique.

Exercice 3. Température de recombinaison

Imaginons d'avoir un plasma de protons et d'électrons.

a) Expliquer ce que signifie qu'un ensemble d'un grand nombre de particules est en *équilibre thermique*, et pourquoi l'univers primordial peut être considéré comme un plasma en équilibre thermique.

b) En utilisant la relation entre la température et l'énergie moyenne des particules d'un plasma (Annexe E) et le résultat du point (e) de l'exercice 2, calculer la température minimale pour que *tous* ses atomes d'hydrogène soient ionisés.

c) À quelle époque de l'histoire thermique cette température correspond-t-elle ?

14. Cette situation correspond au modèle atomique de Bohr, un modèle dépassé car les électrons n'ont pas des vitesses et des positions précises dans l'atome. Toutefois, il donne une bonne estimation de l'énergie mécanique de l'électron.

Exercice 4. Interaction forte

L'interaction forte (Annexe F) est une parmi les quatre interactions fondamentales de la nature. Elle n'affecte pas directement notre vie quotidienne car elle ne devient significative – puis dominante – qu'à partir de très petites échelles de distances, de l'ordre du femtomètre ($1\text{ fm} = 10^{-15}$ m).

a) Quel(s) objet(s) connaissez-vous à cette échelle ?

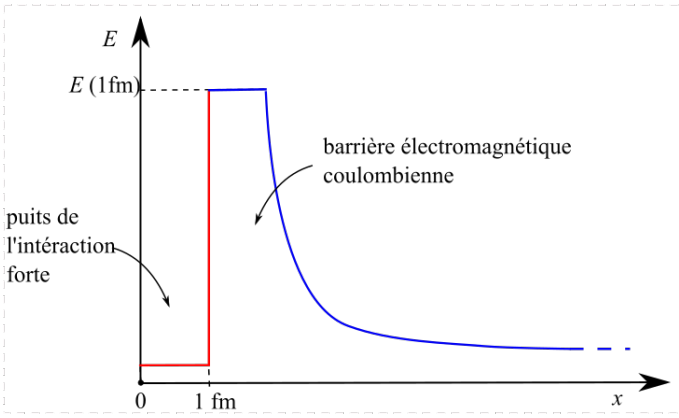
b) Sur quelles particules l'interaction forte agit-elle ?

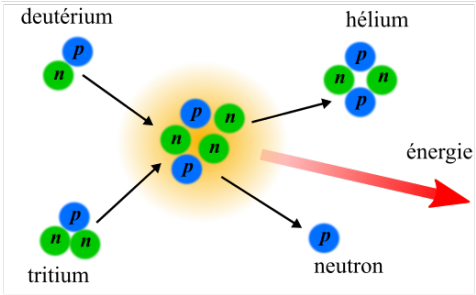
c) Est-ce que les atomes seraient stables, s'il n'existait pas l'interaction forte ?

d) Calculer l'ordre de grandeur (ODG) de l'énergie potentielle électrique de deux protons qui se rapprochent jusqu'à la distance où l'interaction forte devient plus intense que celle électrique, soit ~ 1 fm.

L'ODG trouvé au point (d) correspond à l'énergie minimale que des protons devraient avoir pour fusionner et former un noyau d'hélium (on parle de *fusion nucléaire*) sans tenir compte des effets quantiques. La fusion nucléaire est un processus « difficile » à des températures ordinaires, car il faut fournir une très grande énergie aux protons pour leur permettre de vaincre la *barrière coulombienne* d'énergie potentielle, responsable de la répulsion entre les charges de même signe.

Une fois passée cette barrière, à l'échelle de 1 fm $= 10^{-15}$ m, l'interaction forte d'attraction entre les nucléons domine et le proton tombe dans le *puits de potentiel* attractif d'énergie de l'interaction forte, responsable de l'attraction entre nucléons. Ce puits étant très profond, la fusion nucléaire libère énormément d'énergie.





Exercice 5. Température associée à la barrière coulombienne

Imaginons un plasma de protons (noyaux d'hydrogène). En utilisant la relation entre la température et l'énergie moyenne des particules d'un gaz de protons (Annexe E), calculer la température minimale du plasma primordial pour qu'un nombre significatif de ses protons puisse vaincre la « barrière coulombienne » (énergétique), trouvée dans l'exercice précédent. Quel est l'ordre de grandeur de cette température ?

Exercice 6. Température de fusion nucléaire et effet tunnel

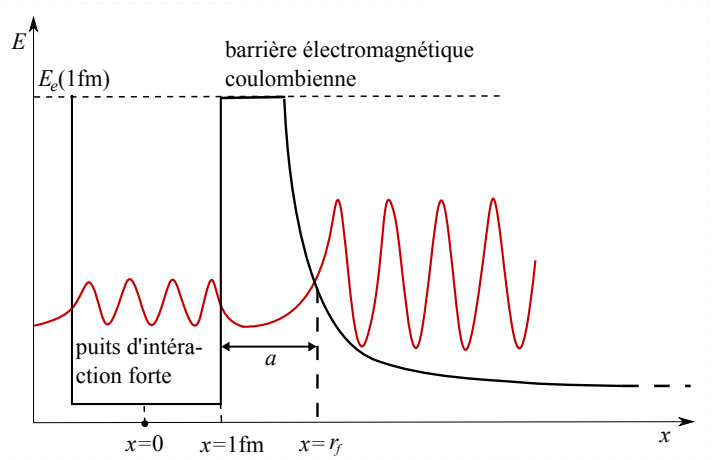
En réalité, la fusion nucléaire est possible à des températures plusieurs ODG plus basses que celles obtenues dans l'exercice 5, où nous avons considéré les protons comme de corpuscules qui doivent atteindre une certaine énergie potentielle (comme une balle qui doit passer au delà d'un mur). Néanmoins dans le monde microscopique subatomique, il n'a pas de sens de considérer les particules comme de corpuscules ponctuels, dont on peut théoriquement connaître la position, la vitesse, l'accélération et l'énergie à un instant arbitrairement précis. En réalité, le concept de « corps matériel » existe seulement à l'échelle macroscopique.

a) Lire l'Annexe G du cours.

b) En sachant que la température de fusion à l'intérieur du Soleil est de 15 millions de degrés Kelvin, déterminer quelle est l'énergie des protons à cette température (correspondant à l'énergie de fusion des protons).

c) Calculer la distance r_f à laquelle les protons s'approchent les uns des autres quand ils atteignent cette énergie (distance à laquelle ils commencent à fusionner).

d) En déduire la largeur de la barrière coulombienne, soit la longueur a du dessin ci-dessous. Que peut-on conclure ?



Exercice 7. Unification de la gravitation et l'électromagnétisme

En comparant les forces électromagnétique et gravitationnelle entre un électron et un proton dans un atome d'hydrogène, mais aussi entre la Terre et la Lune (si on pouvait leur arracher tous les électrons), il est possible de constater que l'interaction gravitationnelle est beaucoup plus faible que celle électromagnétique (Série 1, exercice 6).

a) Supposons maintenant d'avoir deux particules identiques, de même charge $q_1 = q_2 = q$ inconnue, et même masse $m_1 = m_2 = m$, aussi inconnue. Quel doit être le rapport m/q pour que l'interaction gravitationnelle entre ces deux particules soit de même intensité que celle électromagnétique ?

b) Quelle doit être la masse m que les particules doivent avoir si leur charge est égale à la charge fondamentale ($q = e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C), pour que l'interaction gravitationnelle et celle électromagnétique entre elles aient la même intensité ?

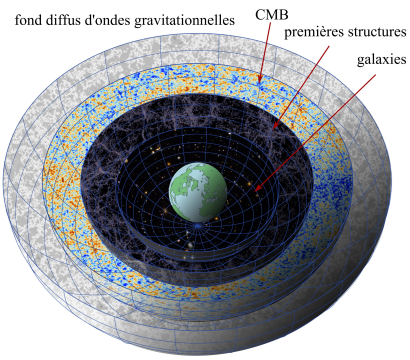
c) À quelle énergie correspond cette masse ? Donner la réponse en J, puis en eV.

Cela signifie que, si une charge élémentaire possède une énergie (cinétique et/ou de masse) de cet ordre, alors son interaction gravitationnelle est comparable à celle électromagnétique, donc aussi aux interactions nucléaires, puisque – à ces échelles d'énergie – les interactions électrique et nucléaires sont déjà unifiées. Si l'énergie de la particule est plus petite, alors la gravitation est plus faible que les autres interactions. C'est à partir de ce seuil d'énergie que la gravitation se découple du plasma primordial.

d) Le résultat obtenu au point (c) est-il en accord avec la valeur donnée dans la théorie pour le découplage de la gravitation ? Commenter ce résultat.

Nous rappelons qu'au moment du découplage électromagnétique du plasma primordial, les ondes correspondantes (électromagnétiques) ont pu s'échapper et voyager librement dans l'espace sous la forme de fond diffus cosmologique : à cette époque l'univers est devenu « transparent » aux ondes électromagnétiques. Aujourd'hui, l'analyse de cette radiation fossile permet d'extraire des informations de l'univers au moment du découplage électromagnétique, environ 380 000 ans après le Big Bang.

De la même manière, au moment du découplage gravitationnel, les ondes correspondantes à cette interaction – les ondes gravitationnelles – ont cessé d'interagir avec le plasma primordial et ont pu voyager librement : l'univers est devenu « transparent » à la radiation gravitationnelle. La détection de ce type d'ondes est difficile à cause de leur faiblesse. Mais, pour cette même raison, une détection du fond diffus cosmologique d'ondes gravitationnelles permettrait d'établir un portrait de l'univers à l'âge du découplage gravitationnel, soit 10^{-43} s après le Big Bang.



Exercice 8. Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse.

1. La densité d'énergie sous forme de radiation a été dominante à redshift $z < 10$.
2. Dans l'équation de Friedmann, aujourd'hui le terme de la constante cosmologique domine l'expansion de l'univers.
3. Avec l'expansion, la densité d'énergie des radiations diminue moins rapidement que la densité de matière.
4. La densité de l'énergie du vide reste constante avec l'expansion de l'univers.
5. L'univers actuel est rempli de toutes les particules et les antiparticules produites lors du Big Bang.
6. La nucléosynthèse primordiale a eu lieu après la recombinaison : des atomes d'hydrogène et/ou de deutérium ont fusionné pour donner des atomes avec un nombre atomique plus élevé.
7. Lors de la nucléosynthèse primordiale, tous les éléments existants aujourd'hui plus lourds que l'hydrogène ont été produits.
8. La plus grande partie de l'hélium présent aujourd'hui dans l'univers a été produite dans les étoiles.
9. L'abondance d'hélium observée est une confirmation du modèle du Big Bang.
10. Toute la matière, baryonique ou non, s'est découplée du plasma primordial au même temps, après la recombinaison.
11. On appelle *âges sombres* l'époque de l'évolution de l'univers où la radiation électromagnétique est négligeable.
12. Les premières étoiles formées après le Big Bang étaient beaucoup plus massives que les étoiles qu'on observe actuellement.
13. La réionisation a eu lieu après le découplage à cause d'une brève phase de contraction de l'univers.

8 Ondes gravitationnelles

Rappel : Les formules suivantes lient la longueur d'onde λ, la période T, la fréquence f et la vitesse de propagation v d'une onde.

$$f = 1/T \qquad \lambda \cdot f = \lambda/T = v \ .$$

Notation : Dans cette série, on appelle la vitesse angulaire d'un système binaire

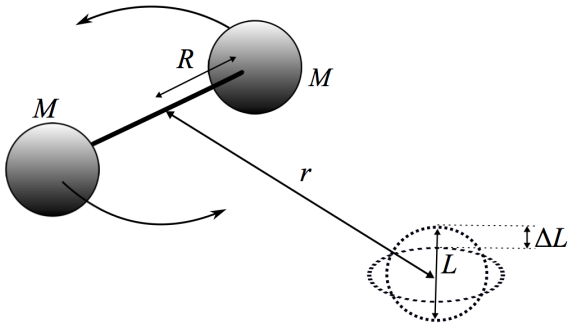
$$\omega = \omega_{\text{sys}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sys}}} = 2\pi \cdot f_{\text{sys}}$$

où T_{sys} est la période de rotation du système et $f_{\text{sys}} = T_{\text{sys}}^{-1}$ sa fréquence, à distinguer de
— la période $T = T_{\text{gw}}$ et
— la fréquence $f = f_{\text{gw}} = T^{-1}$
de l'onde gravitationnelle émise.

Exercice 1. Le haltère

Une onde gravitationnelle est générée par un système binaire de deux corps sphériques de masse identique M, en rotation à une distance $d = 2R$ l'un de l'autre.

L'onde se propage et atteint un anneau de matière « test », de diamètre L, situé à une distance r du centre de rotation. L'onde voyage dans la direction perpendiculaire au plan de l'anneau et produit une déformation relative de celui-ci, dont la formule est



$$h = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2G}{c^4}\frac{M}{r}\omega^2 R^2 \qquad (1)$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation des masses autour du centre [15].

a) Exprimer l'équation (**??**) en fonction du rayon de Schwarzschild de M.

b) Expliquer pourquoi cette quantité est toujours plus petite que 1.

c) Calculer h pour des ondes générées par la rotation d'un haltère terrestre composé de deux masses d'une tonne chacune, situés à $d = 2$ m de distance et tournant à une fréquence $f_{\text{sys}} = 1$ kHz, sur un corps à $r = 10$ m de distance.

15. La position de l'anneau par rapport à l'axe de rotation du système et le type d'onde qui le traverse (transversale ou longitudinale) n'ont pas d'influence sur l'importance de la déformation relative h.

Exercice 2. Vitesse de rotation relativiste : quels objets ?

La formule de l'amplitude h d'une onde gravitationnelle générée par un système binaire symétrique peut être écrite comme le produit de deux facteurs adimensionels :

$$h = \frac{2GM}{c^2 r} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2GM}{c^2 r} \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 .$$

Le premier facteur est du même ordre (à un facteur 4 près) que l'angle de déviation d'un rayon de lumière passant à la distance r d'une masse M – nous savons que sa valeur numérique est relativement petite. Le deuxième facteur est le rapport entre la vitesse de rotation du système et c.

Considérons maintenant un système binaire formé d'une petite masse m tournant autour d'une grande masse M à une distance R, avec $m \ll M$.

a) En utilisant la deuxième loi de Newton appliquée au mouvement circulaire uniforme de m, démontrer que si la vitesse de rotation de m approche celle de la lumière, alors le rayon de sa trajectoire circulaire R doit approcher la moitié du rayon de Schwarzschild de la masse M :

$$v \approx c \quad \Rightarrow \quad R \approx \frac{r_S}{2} = \frac{GM}{c^2} .$$

b) Quels objets ont toute leur masse contenue à l'intérieur du r_S ?

Exercice 3. Une déformation facilement mesurable ?

Supposons qu'il existe un système binaire tournant à une vitesse proche de celle de la lumière ($v = \omega R \sim c$). Ceci est possible uniquement lorsque les deux masses tournent à une distance comparable à leur rayon de Schwarzschild ($R \sim r_S$, voir l'exercice 2).

a) Dans ce cas, quel est l'ordre de grandeur du rapport M/r pour que la déformation relative soit $h \sim 10^{-3}$, plus facilement mesurable (correspondant à une déformation de l'ordre du millimètre pour un anneau de 1 m) ?

b) Quels objets astrophysiques existent ayant ce rapport ?

Exercice 4. Fréquence et masse génératrice

a) Expliquer pourquoi la fréquence d'une onde gravitationnelle est le double de la fréquence de rotation du système binaire qui la génère :

$$f_{\mathrm{gw}} = 2 \cdot f_{\mathrm{sys}} \qquad \text{où} \qquad f_{\mathrm{sys}} = 2\pi\, \omega_{\mathrm{sys}} \ .$$

Pour que la radiation soit la plus intense possible, les masses du système doivent tourner à une vitesse proche de celle de la lumière ($v = \omega R \sim c$). Pour cela, elles doivent tourner à une distance de l'ordre de leur rayon de Schwarzschild ($R \sim r_S$, voir le résultat de l'exercice 3) et donc être très compactes.

b) En utilisant la relation entre la masse et le rayon de Schwarzschild d'un corps et le résultat du point (a), montrer que la formule reliant l'ODG de la fréquence de l'onde $f = f_{\mathrm{gw}}$ et de la masse des composantes du système M est

$$f \sim \frac{c^3}{2\pi\, G\, M} \ .$$

c) Déterminer quelle est la fréquence caractéristique des ondes gravitationnelles émises par un système de trous noirs stellaires de 10 $M_\odot$.

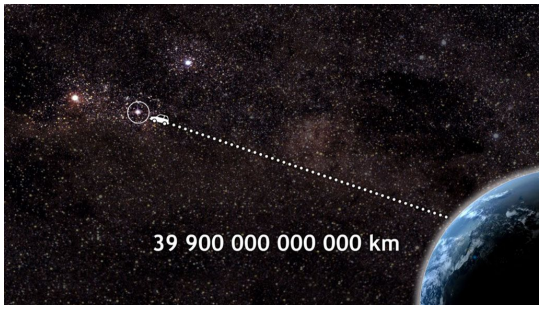
d) Faire le même calcul pour un système de trous noirs supermassifs de 10^6 $M_\odot$.

Exercice 5. Variation de la distance d'une étoile

Parmi les ondes gravitationnelles les plus intenses pouvant provenir d'objets présents dans notre galaxie ($r \sim$ kpc) il y a celles dues à la phase finale du mouvement rotatoire de deux trous noirs d'une masse solaire chacun, juste avant leur collision. Dans cette phase les trous noirs tournent à une distance de l'ordre de leur rayon de Schwarzschild, donc à une vitesse orbitale proche de celle de la lumière ($v = \omega R \sim c$).

a) Estimer quelle serait l'ordre de grandeur de la déformation relative h dans ce cas optimiste.

b) Quelle serait la variation ΔL de la distance entre la Terre et l'étoile la plus proche, Proxima Centauri, causée par le passage d'une telle onde ?



Crédit : http ://www.futura-sciences.com

Exercice 6. Fréquence et longueur du détecteur

Chaque interféromètre possède une bande de fréquences pour lesquelles il est mieux adapté à la détection d'ondes gravitationnelles, en fonction de sa longueur L. En effet, si la période d'oscillation d'une onde est égale ou plus petite que la durée employée par la lumière pour traverser l'instrument $t = L/c$, lorsqu'un photon traverse un bras du détecteur, la distance entre les deux miroirs varie plusieurs fois et donc plusieurs contributions à la déformation ΔL de signe différent se superposent en altérant le signal. On considère donc qu'un détecteur est suffisamment efficace lorsque la durée t de sa traversée par la lumière est au moins 10 fois plus petite que la période T de l'onde qu'on souhaite détecter :

$$t = \frac{L}{c} \leq 0,1\,T\ .$$

a) En utilisant les considérations ci-dessus, écrire une formule donnant la fréquence maximale qu'une onde peut avoir pour qu'elle soit détectable par un instrument de dimension L.

b) Quelle doit être L pour détecter une onde de fréquence comprise entre 10 Hz et 1 kHz ? À quels objets astrophysiques correspondent ces valeurs de fréquences ? Peut-on construire des détecteurs d'ondes gravitationnelles de cette taille ?

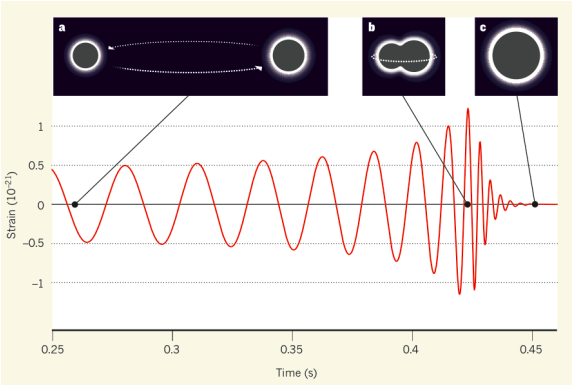
c) L'interféromètre spatial LISA, qui sera lancé en orbite héliocentrique dans les prochaines décennies, possède des « bras » de 5 millions de km. Quelles fréquences pourra-t-il détecter ? À quels objets astrophysiques correspondent ces valeurs de fréquence ?

Exercice 7. GW091415

La première détection historique d'onde gravitationnelle a eu lieu le 14 septembre 2015 (GW091415) par les deux interféromètres LIGO aux Etats-Unis. Il s'agit d'une collision entre deux trous noirs de masses $M_1 = 29\ M_\odot$ et $M_2 = 36\ M_\odot$, à une distance $r = 400$ Mpc de la Terre. Le trou noir obtenu après la collision a une masse de $62\ M_\odot$.

On a pu observer :

1. Les dernières 8 périodes du signal émis par la rotation des deux trous noirs, dans une bande de fréquence entre 35 et 150 Hz ;
2. La collision à $f = 150$ Hz ;
3. La phase de « ringdown », pendant laquelle le trou noir final, de forme asymétrique, irradie des ondes pour retrouver une forme sphérique.



Crédit : 2016 Macmillan Publishers Limited, Nature 17306g.

La durée totale du signal a été de 0,45 s.

Une simulation de cet événement se trouve au lien suivant [16] :

https://www.youtube.com/watch?v=flvFpFUzEXY.

a) Déterminer la période de rotation du système juste avant la collision.

b) À partir de la distance r de la collision, déterminer le redshift correspondant. Il y a combien d'années cette collision s'est-elle vérifiée ?

c) Quelle est la variation de masse du système lors de la collision ?

d) En supposant que toute cette masse a été convertie en énergie radiative gravitationnelle, quelle est l'énergie irradiée lors de cette collision ? Donner la réponse en $M_\odot \cdot c^2$ puis en J.

e) Quelle est la puissance moyenne irradiée pendant la durée observée ? Existe-t-il des phénomènes connus avec une puissance comparable ?

f) Calculer le rendement de cette collision : $\eta = \Delta E_{\text{irradiée}}/E_{\text{tot}}$.

g) La réaction de fusion nucléaire la plus énergétique est la suivante (production d'un noyau d'hélium) : $^2\text{H} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{proton} + 18,4$ MeV. Calculer son rendement énergétique et le comparer avec celui de la collision GW091415.
La masse du proton est $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg $= 938\,\text{MeV}/c^2$.

16. D'autres informations sont disponibles sur le site de la collaboration LIGO : https://www.ligo.org/detections/GW150914.php.